

8 Ecuaciones. Sistemas de ecuaciones

ACTIVIDADES INICIALES

8.I. ¿Qué es una clepsidra? ¿Qué ventajas tiene sobre el reloj de sol?

Un reloj de agua. La ventaja respecto al reloj de sol es que puede funcionar por la noche o en días sin sol, y la ventaja respecto al reloj de arena es que se podían hacer más grandes y medir más tiempo.

8.II. Redacta un problema de matemáticas como el planteado por el padre de Lilavati y pásalo a tus compañeros. Exponed los problemas en clase e intentad resolverlos a medida que estudiáis la unidad.

Resolved también el problema planteado en el texto.

Actividad abierta

8.III. Investiga las principales contribuciones de las matemáticas indias, haz un breve informe de una página y ponlo en común con tus compañeros.

Actividad abierta

ACTIVIDADES PROPUESTAS

8.1. Actividad resuelta

8.2. Escribe estos enunciados en forma de ecuación.

- La suma de dos números consecutivos es 21.
- La suma de tres números pares consecutivos es 30.
- Un número más su quinta parte es 12.

$$a) x + (x + 1) = 21$$

$$b) 2x + (2x + 2) + (2x + 4) = 30$$

$$c) x + \frac{x}{5} = 12$$

8.3. En una academia de idiomas el número de alumnos que estudian francés es la mitad de los que estudian inglés. Calcula el número de alumnos de cada grupo si en total son 240.

Sea x el número de alumnos de francés. $2x + x = 240 \Rightarrow x = 80$.

Hay 80 alumnos que estudian francés y 160 que estudian inglés.

8.4. Formula como una ecuación “un número impar es igual a un número par” e intenta resolverla. ¿Qué observas?

“Un número impar”: $2x + 1$

“Un número par”: $2x$

“Un número impar es igual a un número par”: $2x + 1 = 2x \Rightarrow 0 = 1$, no es cierto, luego no puede ser que un número impar sea igual a un número par.

8.5. ¿Verdadero o falso? Razona la respuesta.

a) $x = 2$ es solución de $x^2 - 2x + 2 = 2$.

b) $\frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} = x^2 + 1$ es una identidad.

c) ¿Tiene soluciones reales $\sqrt{x} = -\frac{1}{2}$?

d) Si una ecuación consiste en un polinomio igualado a 0, entonces las raíces del polinomio son las soluciones de la ecuación.

a) Verdadero, ya que $2^2 = 2 \cdot 2$

b) Falso, ya que para el valor $x = 1$ no es cierta, para $\frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$ no existe y para $x^2 + 1$ vale 2.

c) No, porque $\sqrt{x} \geq 0$ y $-\frac{1}{2} < 0$

d) Verdadero

8.6. Actividad resuelta

8.7. Resuelve la siguiente ecuación. $5x + 4 = 19 + 2x$

$$5x + 4 = 19 + 2x$$

$$5x + 4 - 2x = 19 + 2x - 2x \Rightarrow 3x + 4 = 19$$

$$3x + 4 - 4 = 19 - 4 \Rightarrow 3x = 15$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{15}{3} \Rightarrow x = 5$$

8.8. Halla la solución de esta ecuación. $18x - 50 = 14x - 4x + 6$

$$18x - 50 = 14x - 4x + 6 \Rightarrow 18x - 50 - 10x + 50 = 10x + 6 - 10x + 50 \Rightarrow 8x = 56 \Rightarrow x = 7$$

8.9. Resuelve la siguiente ecuación. $6x - 4 = 60 - 2x$

$$6x - 4 = 60 - 2x \Rightarrow 6x - 4 + 2x + 4 = 60 - 2x + 2x + 4 \Rightarrow 8x = 64 \Rightarrow x = 8$$

8.10. Las edades de tres alumnos son números pares consecutivos.

Si la suma de sus edades es 42, ¿cuántos años tiene cada uno?

La ecuación es $2x + (2x + 2) + (2x + 4) = 42$.

$$2x + (2x + 2) + (2x + 4) = 42 \Rightarrow 6x + 6 = 42 \Rightarrow x = 6$$

Tienen 12, 14 y 16 años, respectivamente.

8.11. María ha dibujado un rectángulo cuyo largo es tres veces el ancho.

Si el perímetro del rectángulo mide 80 centímetros, ¿cuánto mide el área?

Si x es el ancho, $3x$ es el largo. Entonces, el perímetro es $x + 3x + x + 3x$.

$$x + 3x + x + 3x = 80 \Rightarrow 8x = 80 \Rightarrow x = 10 \text{ cm}$$

$$A = 10 \cdot 30 = 300 \text{ cm}^2$$

8.12. Los cuadrados mágicos cumplen que la suma de cualquiera de sus filas, columnas o diagonales es siempre la misma.

a) Copia y rellena los huecos que faltan.

b) Averigua cuánto vale x si la suma de este cuadrado mágico es 33.

c) Si sumas 1 a todas las casillas del cuadrado, ¿sigue siendo mágico? ¿Por qué? Compruébalo.

a)

$x + 2$	$x - 5$	$x + 3$
$x + 1$	x	$x - 1$
$x - 3$	$x + 5$	$x - 2$

b) $3x = 33 \Rightarrow x = 11$

c) Sí. Ahora, la suma de cualquiera de sus filas, columnas o diagonales es $3x + 3$.

8.13. Resuelve estas ecuaciones con paréntesis.

a) $2(x + 1) - 3(x - 2) = x + 6$

b) $x + 20 = 5(x - 20)$

a) $2(x + 1) - 3(x - 2) = x + 6 \Rightarrow 2x + 2 - 3x + 6 = x + 6 \Rightarrow -x + 8 = x + 6 \Rightarrow 2 = 2x \Rightarrow x = 1$

b) $x + 20 = 5(x - 20) \Rightarrow x + 20 = 5x - 100 \Rightarrow 120 = 4x \Rightarrow x = 30$

8.14. Resuelve las siguientes ecuaciones con denominadores.

a) $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} + \frac{x}{5} = 34$

b) $\frac{x}{2} + \frac{3x}{4} - \frac{5x}{6} = 15$

a) $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} + \frac{x}{5} = 34 \Rightarrow 20x - 15x + 12x = 60 \cdot 34 \Rightarrow 17x = 2040 \Rightarrow x = 120$

b) $\frac{x}{2} + \frac{3x}{4} - \frac{5x}{6} = 15 \Rightarrow 6x + 3 \cdot 3x - 2 \cdot 5x = 12 \cdot 15 \Rightarrow 5x = 180 \Rightarrow x = 36$

8.15. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $2(x + 2) - 5(2x - 3) = 3$

b) $8(x + 3) + 4(x - 2) = 9x - 7$

a) $2(x + 2) - 5(2x - 3) = 3 \Rightarrow 2x + 4 - 10x + 15 = 3 \Rightarrow -8x = -16 \Rightarrow x = 2$

b) $8(x + 3) + 4(x - 2) = 9x - 7 \Rightarrow 8x + 24 + 4x - 8 = 9x - 7 \Rightarrow 3x = -23 \Rightarrow x = -\frac{23}{3}$

8.16. (TIC) Resuelve estas ecuaciones.

a) $4x + \frac{6x}{7} = \frac{3x + 2}{2} + 46$

b) $x - \frac{4x}{5} + 39 = x + \frac{x}{2}$

a) $4x + \frac{6x}{7} = \frac{3x + 2}{2} + 46 \Rightarrow 14 \cdot 4x + 2 \cdot 6x = 7(3x + 2) + 14 \cdot 46 \Rightarrow 47x = 658 \Rightarrow x = 14$

b) $x - \frac{4x}{5} + 39 = x + \frac{x}{2} \Rightarrow 10x - 2 \cdot 4x + 10 \cdot 39 = 10x + 5x \Rightarrow 390 = 13x \Rightarrow x = 30$

8.17. La tercera, la cuarta, la quinta y la sexta parte de mi dinero suman 6 euros menos de lo que llevo. ¿Cuánto llevo?

Dinero = x

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x + \frac{1}{6}x = x - 6 \Rightarrow x = 120 \text{ euros}$$

8.18. Actividad interactiva

8.19. Actividad resuelta

8.20. Decide cuál de estas ecuaciones es de segundo grado.

a) $x^2 = 9x - 18$ b) $3x^2 + 3x - 28 = 1 + 3x^2$ c) $2 - 5x^2 - x^3 = 3x^2 - 2x^3 + x^3$

Las ecuaciones de 2.º grado son la a y la c. En la ecuación b, al operar desaparecen los términos de 2º grado.

8.21. (TIC) ¿Qué ecuación tiene por soluciones 3 y 4?

a) $x^2 + 7x - 12 = 0$ c) $x^2 - 7x + 12 = 0$
 b) $x^2 - 12x + 7 = 0$ d) $x^2 + 12x - 7 = 0$

La ecuación c. $3^2 - 7 \cdot 3 + 12 = 0$; $4^2 - 7 \cdot 4 + 12 = 0$

8.22. Escribe las ecuaciones de segundo grado que tenga estas soluciones.

a) 2 y 1 c) 3 y -3
 b) -4 y 5 d) -1 y -7

a) $x^2 - (2 + 1)x + 2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$
 b) $x^2 - (-4 + 5)x + (-4) \cdot 5 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 20 = 0$
 c) $x^2 - [3 + (-3)]x + 3 \cdot (-3) = 0 \Rightarrow x^2 - 9 = 0$
 d) $x^2 - [-1 + (-7)]x + (-1) \cdot (-7) = 0 \Rightarrow x^2 + 8x + 7 = 0$

8.23. Escribe una ecuación de segundo grado que tenga por raíces -2 y $\frac{1}{3}$.

$$x^2 - (-2 + \frac{1}{3})x + (-2) \cdot \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow 3x^2 + 5x - 2 = 0$$

8.24. ¿Verdadero o falso? Toda ecuación de segundo grado tiene dos soluciones reales.

Falso, puede tener 0, 1 ó 2 soluciones reales.

8.25. Actividad resuelta

8.26. Halla las soluciones de estas ecuaciones.

a) $5x^2 - 20 = 0$ b) $-4x^2 + 100 = 0$

a) $5x^2 - 20 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2, x = -2$
 b) $-4x^2 + 100 = 0 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = 5, x = -5$

8.27. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $3x^2 - 12x = 0$ c) $-2x^2 - 6x = 0$
 b) $x^2 + 25x = 0$ d) $-8x^2 + 24x = 0$

a) $3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x(3x - 12) = 0$. Soluciones: $x = 0$ y $x = 4$
 b) $x^2 + 25x = 0 \Rightarrow x(x + 25) = 0$. Soluciones: $x = 0$ y $x = -25$
 c) $-2x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x(-2x - 6) = 0$. Soluciones: $x = 0$ y $x = -3$
 d) $-8x^2 + 24x = 0 \Rightarrow x(-8x + 24) = 0$. Soluciones: $x = 0$ y $x = 3$

8.28. Calcula las soluciones de estas ecuaciones.

a) $3x^2 = 0$ b) $-7x^2 = 0$

a) $3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

b) $-7x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

8.29. (TIC) Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $3x^2 - 5x = x$ c) $2x^2 - x - 3 - 1 = x - 4$

b) $3x^2 = 75x$ d) $x^2 - x = 3x^2 - x$

a) $3x^2 - 5x = x \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x(3x - 6) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$

b) $3x^2 = 75x \Rightarrow x(3x - 75) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 25$

c) $2x^2 - x - 3 - 1 = x - 4 \Rightarrow x(2x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1$

d) $x^2 - x = 3x^2 - x \Rightarrow 2x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

8.30. (TIC) La distancia s de frenado en kilómetros de un coche que va a una velocidad de

v km/h y decelera a a km/h² viene dada por $s = \frac{v^2}{2a}$.

¿A qué velocidad iba un coche que, frenando a 500 km/h², recorrió 100 m antes de detenerse por completo?

$$s = \frac{v^2}{2a} \Rightarrow v^2 = 2a \cdot s \Rightarrow v = \sqrt{2a \cdot s} = \sqrt{2 \cdot 500 \cdot 0,1} = \sqrt{100} = 10 \text{ km/h}$$

8.31. Actividad resuelta

8.32. Resuelve estas ecuaciones.

a) $x^2 - 3x + 2 = 0$ b) $2x^2 - 5x + 2 = 0$

a) $x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2}; x = 2, x = 1$

b) $x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4}; x = 2, x = \frac{1}{2}$

8.33. (TIC) Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $x^2 - 7x + 10 = 0$ c) $x^2 - 4x + 3 = 0$

b) $x^2 - 11x + 30 = 0$ d) $x^2 + 8x + 12 = 0$

a) $x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2}; x = 5, x = 2$

b) $x = \frac{11 \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 30}}{2 \cdot 1} = \frac{11 \pm \sqrt{1}}{2}; x = 6, x = 5$

c) $x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2}; x = 3, x = 1$

d) $x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1} = \frac{-8 \pm \sqrt{16}}{2}; x = -2, x = -6$

8.34. Sin resolverlas, averigua el número de soluciones de estas ecuaciones.

- a) $2x^2 + x + 2 = 0$ c) $3x^2 - 5x - 8 = 0$
 b) $x^2 - 6x + 9 = 0$ d) $-3x^2 - 4x + 5 = 0$

Vemos el signo del discriminante.

- a) $1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 < 0$. No tiene soluciones reales.
 b) $(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0$. Tiene una única solución.
 c) $(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-8) > 0$. Tiene dos soluciones reales.
 d) $(-4)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 5 > 0$. Tiene dos soluciones reales.

8.35. ¿Tiene solución $2x^2 + x + 3 = x^2 + x + 2$?

$2x^2 + x + 3 = x^2 + x + 2 \Rightarrow x^2 + 1 = 0$. Como el discriminante es $-4 < 0$, la ecuación no tiene soluciones reales.

8.36. Actividad resuelta

8.37. Plantea el sistema de ecuaciones lineales para este enunciado: “Una clase tiene 36 alumnos y el número de chicas es el triple que el de chicos”.

Sea x el número de chicas e y el número de chicos.

$$\begin{cases} x + y = 36 \\ x = 3y \end{cases}$$

y	0	1	2	...	9
$x = 3y$	0	3	6	...	27
$x + y$	0	4	8	...	36

En la clase hay 9 chicos y 27 chicas.

8.38. Comprueba si los valores $x = 2$ e $y = 7$ son soluciones de los siguientes sistemas.

- a) $\begin{cases} 4x - y = 1 \\ x + 2y = 15 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -3x + y = 1 \\ 5x - y = 3 \end{cases}$
 a) $\begin{cases} 4 \cdot 2 - 7 = 1 \\ 2 + 2 \cdot 7 = 16 \neq 15 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -3 \cdot 2 + 7 = 1 \\ 5 \cdot 2 - 7 = 3 \end{cases}$

$x = 2$ e $y = 7$ no son solución del sistema. $x = 2$ e $y = 7$ sí son solución del sistema.

8.39. El perímetro de un rectángulo es de 30 metros y la base es el doble de la altura.

- a) Plantea el sistema de ecuaciones lineales para averiguar los lados.
 b) Resuelve el sistema mediante una tabla dando valores a la altura.
 c) ¿Cuál es el área del rectángulo?

a) Si la altura del rectángulo es x , la base es $2x \Rightarrow 2x + x + 2x + x = 30$.

b)

Altura (x)	Base ($2x$)	Perímetro
1 m	2 m	6 m
2 m	4 m	12 m
3 m	6 m	18 m
4 m	8 m	24 m
5 m	10 m	30 m

c) $S = 5 \cdot 10 = 50 \text{ m}^2$

8.40. Actividad resuelta

8.41. Resuelve estos sistemas, sumando o restando ecuaciones.

$$a) \begin{cases} x + y = 50 \\ x - y = 10 \end{cases}$$

a) Sumando:

$$\begin{array}{r} x + y = 50 \\ x - y = 10 \\ \hline 2x = 60 \Rightarrow x = 30, y = 20 \end{array}$$

$$b) \begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ 3x - 3y = 15 \end{cases}$$

b) Restando:

$$\begin{array}{r} 2x - 3y = 12 \\ 3x - 3y = 15 \\ \hline -x = -3 \Rightarrow x = 3, y = -2 \end{array}$$

8.42. Resuelve los siguientes sistemas, sumando o restando ecuaciones.

$$a) \begin{cases} x + 2y = 100 \\ x - 2y = 60 \end{cases}$$

a) Sumando:

$$\begin{array}{r} x + 2y = 100 \\ x - 2y = 60 \\ \hline 2x = 160 \Rightarrow x = 80, y = 10 \end{array}$$

$$b) \begin{cases} 2x - y = 12 \\ 3x - y = 22 \end{cases}$$

b) Restando:

$$\begin{array}{r} 2x - y = 12 \\ 3x - y = 22 \\ \hline -x = -10 \Rightarrow x = 10, y = 8 \end{array}$$

8.43. Las soluciones de dos sistemas equivalentes son $x = 1, y = 2$, y $x = 1, y = 3$. ¿Es esto posible? ¿Por qué?

No, porque si son sistemas equivalentes, han de tener las mismas soluciones.

8.44. (TIC) Utiliza la regla de la suma de ecuaciones para resolver los siguientes sistemas.

$$a) \begin{cases} x + y = 20 \\ x - y = 10 \end{cases}$$

$$a) x + y = 20$$

$$\begin{array}{r} x + y = 20 \\ x - y = 10 \\ \hline 2x = 30 \Rightarrow x = 15, y = 5 \end{array}$$

$$b) \begin{cases} x + y = 2 \\ -x - y = 0 \end{cases}$$

$$b) x + y = 2$$

$$\begin{array}{r} x + y = 2 \\ -x - y = 0 \\ \hline 0 = 2 \Rightarrow \text{No tiene solución.} \end{array}$$

8.45. (TIC) La suma de dos números es 120, y su diferencia es 60. ¿Cuáles son? Utiliza la regla de la suma para resolverlo.

Sean los números x e y .

$$\begin{array}{r} \begin{cases} x + y = 120 \\ x - y = 60 \end{cases} \\ \hline 2x = 180 \Rightarrow x = 90, y = 30 \end{array}$$

Los números son 30 y 90.

8.46. Actividad interactiva

8.47. Actividad resuelta

8.48. Resuelve por sustitución estos sistemas.

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 6 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \qquad \text{b) } \begin{cases} 2x + y = 20 \\ x + 2y = 19 \end{cases}$$

a)

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 6 \\ x = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y + y = 6 \\ x = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y = 6 \\ x = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 4 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} 2x + y = 20 \\ x + 2y = 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 20 - 2x \\ x + 2(20 - 2x) = 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 20 - 2x \\ x + 40 - 4x = 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 20 - 2x \\ -3x = -21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 20 - 2 \cdot 7 = 6 \\ x = 7 \end{cases}$$

8.49. (TIC) Halla la solución de los siguientes sistemas.

$$\text{a) } \begin{cases} x - y = 3 \\ 3x + 2y = 44 \end{cases} \qquad \text{b) } \begin{cases} 5x + 2y = 46 \\ x - y = -2 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} x - y = 3 \\ 3x + 2y = 44 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + y \\ 3(3 + y) + 2y = 44 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + y \\ 9 + 3y + 2y = 44 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + y \\ 5y = 35 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + 7 = 10 \\ y = 7 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 5x + 2y = 46 \\ x - y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5(y - 2) + 2y = 46 \\ x = y - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7y = 56 \\ x = y - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 8 \\ x = 6 \end{cases}$$

8.50. Plantea para este enunciado un sistema de ecuaciones y resuélvelo por sustitución: “En un corral hay conejos y patos. El número de animales es 30 y el de patas 100”. ¿Cuántos conejos y patos hay en el corral?

Sea x el número de conejos y y el de patos.

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ 4x + 2y = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 30 - y \\ 4(30 - y) + 2y = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 30 - y \\ -2y = -20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 30 - 10 = 20 \\ y = 10 \end{cases}$$

Hay 20 conejos y 10 patos.

8.51. La base de un rectángulo es 12 centímetros mayor que la altura y su perímetro es 64 centímetros. Halla sus dimensiones.

Sea x la longitud de la base e y la de la altura.

$$\begin{cases} x = 12 + y \\ 2x + 2y = 64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 12 + y \\ 2(12 + y) + 2y = 64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 12 + y \\ 4y = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 12 + 10 = 22 \\ y = 10 \end{cases}$$

La base del rectángulo mide 22 centímetros, y la altura, 10.

8.52. Eva: “Si yo te quito dos monedas, tendré tantas como tú”.

Elena: “Sí, pero si yo te quito cuatro, entonces tendré cuatro veces más que tú”.

¿Cuántas monedas tienen Eva y Elena?

x : monedas que tiene Eva.

y : monedas que tiene Elena.

$$\begin{cases} x + 2 = y - 2 \\ y + 4 = 4(x - 4) \end{cases} \Rightarrow x = 8, y = 12$$

8.53. Actividad resuelta

8.54. Resuelve por reducción estos sistemas.

$$a) \begin{cases} 4x - 5y = 2 \\ 5x + 3y = 21 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x - 5y = 8 \\ 27x + 8y = 25 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} 4x - 5y = 2 \\ 5x + 3y = 21 \end{cases} \begin{cases} 12x - 15y = 6 \\ 25x + 15y = 105 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x - 5y = 8 \\ 27x + 8y = 25 \end{cases} \begin{cases} 8x - 40y = 64 \\ 135x + 40y = 125 \end{cases}$$

$$37x = 111 \Rightarrow x = 3$$

$$143x = 189 \Rightarrow x = \frac{189}{143}$$

$$\begin{cases} 4x - 5y = 2 \\ 5x + 3y = 21 \end{cases} \begin{cases} 20x - 25y = 10 \\ -20x - 12y = -84 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 5y = 8 \\ 27x + 8y = 25 \end{cases} \begin{cases} -27x + 135y = -216 \\ 27x + 8y = 25 \end{cases}$$

$$-37y = -74 \Rightarrow y = 2$$

$$143y = -191 \Rightarrow x = -\frac{191}{143}$$

8.55. Halla la solución de los siguientes sistemas por reducción.

$$a) \begin{cases} 6x + 5y = 16 \\ 5x - 12y = -19 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 22x + 15y = 9 \\ 18x + 25y = 71 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} 6x + 5y = 16 \\ 5x - 12y = -19 \end{cases} \begin{cases} 72x + 60y = 192 \\ 25x - 60y = -95 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 22x + 15y = 9 \\ 18x + 25y = 71 \end{cases} \begin{cases} 198x + 135y = 81 \\ -198x - 275y = -781 \end{cases}$$

$$97x = 97 \Rightarrow x = 1$$

$$-140y = -700 \Rightarrow y = 5$$

$$\begin{cases} 6x + 5y = 16 \\ 5x - 12y = -19 \end{cases} \begin{cases} 30x + 25y = 80 \\ -30x + 72y = 114 \end{cases}$$

$$97y = 194 \Rightarrow y = 2$$

$$\begin{cases} 22x + 15y = 9 \\ 18x + 25y = 71 \end{cases} \begin{cases} 110x + 75y = 45 \\ -54x - 75y = -213 \end{cases}$$

$$56x = -168 \Rightarrow x = -3$$

8.56. Intenta resolver el sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$. ¿Qué observas?

El sistema no tiene solución, al resolverlo llegamos a $5 = 7$, que no es cierto.

8.57. (TIC) Resuelve estos sistemas por reducción.

$$a) \begin{cases} 3x + 5y = 16 \\ 2x + 6y = 16 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3x + 7y = -23 \\ 5x + 4y = -23 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} 3x + 5y = 16 \\ 2x + 6y = 16 \end{cases} \begin{cases} 6x + 10y = 32 \\ -6x - 18y = -48 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3x + 7y = -23 \\ 5x + 4y = -23 \end{cases} \begin{cases} 15x + 35y = -115 \\ -15x - 12y = 69 \end{cases}$$

$$-8y = -16 \Rightarrow y = 2$$

$$23y = -46 \Rightarrow y = -2$$

$$\begin{cases} 3x + 5y = 16 \\ 2x + 6y = 16 \end{cases} \begin{cases} 18x + 30y = 96 \\ -10x - 30y = -80 \end{cases}$$

$$8x = 16 \Rightarrow x = 2$$

$$\begin{cases} 3x + 7y = -23 \\ 5x + 4y = -23 \end{cases} \begin{cases} 12x + 28y = -92 \\ -35x - 28y = 161 \end{cases}$$

$$-23x = 69 \Rightarrow x = -3$$

8.58. Halla dos números naturales tales que su suma aumentada en 22 sea igual a dos veces el mayor, y que la diferencia de los dos números menos 1 sea igual al menor.

Sean x e y los números.

$$\begin{cases} x + y + 22 = 2x \\ x - y - 1 = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + y = -22 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 2y = -44 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

$$-y = -21; \quad -x = -43$$

Los números son 43 y 21.

8.59. Tu tío tiene 27 años más que su hijo, y dentro de 12 le doblará la edad. ¿Cuántos años tiene cada uno? Resuélvelo por reducción.

Llamando y a la edad del tío y x a la de su hijo:

$$\begin{cases} y = 27 + x \\ y + 12 = 2(x + 12) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - x = 27 \\ y - 2x = 12 \end{cases}$$

$$x = 15$$

$$\begin{cases} y = 27 + x \\ y + 12 = 2(x + 12) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - x = 27 \\ y - 2x = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2y + 2x = -54 \\ y - 2x = 12 \end{cases}$$

$$-y = -42 \Rightarrow y = 42$$

El tío tiene 42 años, y su hijo, 15.

8.60. Actividad resuelta

8.61. (TIC) Resuelve gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones.

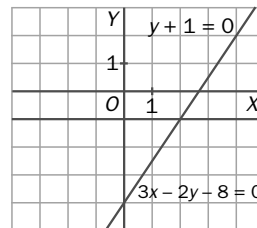
a) $\begin{cases} 3x - 2y - 8 = 0 \\ y + 1 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 6x + y = 0 \end{cases}$

a) Se despeja y en las ecuaciones: $y = \frac{3x - 8}{2}$; $y = -1$.

x	$y = \frac{3x - 8}{2}$
0	-4
2	-1

x	$y = -1$
0	-1
1	-1

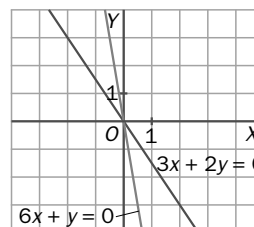


Solución: $x = 2$, $y = -1$

b) Se despeja y en las ecuaciones: $y = -\frac{3}{2}x$; $y = -6x$

x	$y = -\frac{3}{2}x$
0	0
2	-3

x	$y = -6x$
0	0
$\frac{1}{2}$	-3



Solución: $x = 0$, $y = 0$

8.62. (TIC) Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones mediante un método gráfico.

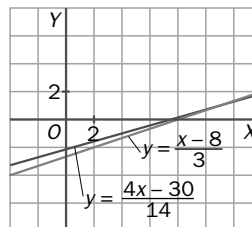
a) $\begin{cases} 2x - 3y - 8 = x \\ 4x - 12y - 30 = 2y \end{cases}$

b) $\begin{cases} -3x + 5y + 14 = 3y \\ 7x + 4y - 2 = -2x \end{cases}$

a) Se despeja y en las ecuaciones: $y = \frac{x-8}{3}$; $y = \frac{4x-30}{14}$

x	$y = \frac{x-8}{3}$
2	-2
-1	-3

x	$y = \frac{4x-30}{14}$
4	-1
$\frac{1}{2}$	-2

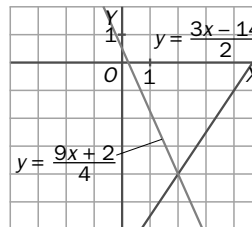


Solución: $x = 11, y = 1$

b) Se despeja y en las ecuaciones: $y = \frac{3x-14}{2}$; $y = \frac{-9x+2}{4}$

x	$y = \frac{3x-14}{2}$
4	-1
2	-4

x	$y = \frac{-9x+2}{4}$
0	$\frac{1}{2}$
-2	5

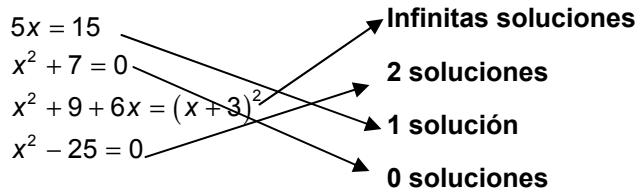


Solución: $x = 2, y = -4$

EJERCICIOS

Ecuaciones de primer grado

8.63. Relaciona cada ecuación con su número de soluciones.



8.64. En una familia, la madre gana el triple que el padre y entre los dos ingresan mensualmente 4 800 euros.

- a) Escribe la ecuación que corresponde a esa situación.
 b) ¿Cuánto gana cada uno?

a) $x + 3x = 4800$

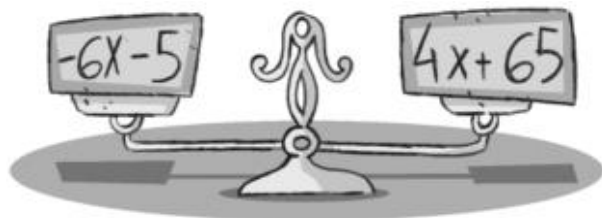
b) $4x = 4800 \Rightarrow x = 1200; 3x = 3600$. El padre gana 1200 euros, y la madre, 3600.

8.65. En la ecuación $8x - 6 = -5x + 20$, realiza las transformaciones que se indican.

1. Suma $5x$ a los dos miembros.
 2. Suma 6 a los dos miembros.
 3. Divide por 13 los dos miembros.
- ¿Cuál es la solución?

1. $13x - 6 = 20$
2. $13x = 26$
3. $x = 2$. La solución es $x = 2$.

8.66. ¿Para qué valor de x la balanza está equilibrada?



$$-6x - 5 = 4x + 65 \Rightarrow -60 = 10x \Rightarrow x = -6$$

8.67. ¿Qué es resolver una ecuación? Resuelve la ecuación $(x + 1) \cdot (x - 4) = 0$.

Es encontrar un valor para la incógnita de modo que se cumpla la igualdad.

$(x + 1) \cdot (x - 4) = 0$. Para que el producto sea 0 , alguno de los dos factores debe ser 0 , de modo que $x = -1$ o $x = 4$.

8.68. (TIC) Averigua si los valores $0, -2, 1, 5, 3$ y -3 son soluciones de $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$.

$$0^3 - 3 \cdot 0^2 - 13 \cdot 0 + 15 = 0 \Rightarrow 15 = 0 \Rightarrow 0. \text{ No es solución.}$$

$$(-2)^3 - 3(-2)^2 - 13(-2) + 15 = 0 \Rightarrow 21 = 0 \Rightarrow -2. \text{ No es solución.}$$

$$1^3 - 3(1)^2 - 13(1) + 15 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow 1. \text{ Es solución.}$$

$$5^3 - 3 \cdot 5^2 - 13 \cdot 5 + 15 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow 5. \text{ Es solución.}$$

$$3^3 - 3 \cdot 3^2 - 13 \cdot 3 + 15 = 0 \Rightarrow -24 = 0 \Rightarrow 3. \text{ No es solución.}$$

$$(-3)^3 - 3(-3)^2 - 13(-3) + 15 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow -3. \text{ Es solución.}$$

8.69. Escribe con una sola incógnita las ecuaciones correspondientes.

a) Un número más su doble más su mitad, suman 21 .

b) Los cuadrados de dos números consecutivos se diferencian en 15 .

c) La mitad más la cuarta parte de un número suman 13 unidades más que el tercio más la quinta parte del mismo número.

$$a) x + 2x + \frac{x}{2} = 21$$

$$b) (x + 1)^2 - x^2 = 15$$

$$c) \frac{x}{2} + \frac{x}{4} = \frac{x}{3} + \frac{x}{5} + 13$$

8.70. Resuelve las siguientes ecuaciones.

$$a) \frac{x}{2} + \frac{x}{16} = \frac{x}{8} + \frac{x}{4} + 6$$

$$b) 5 - (x + 2) = 13 - 4(3x - 1)$$

$$a) \frac{8x + x}{16} = \frac{2x + 4x + 96}{16} \Rightarrow 9x = 6x + 96 \Rightarrow 3x = 96 \Rightarrow x = 32$$

$$b) 5 - x - 2 = 13 - 12x + 4 \Rightarrow 11x = 14 \Rightarrow x = \frac{14}{11}$$

8.71. En una clase de 28 alumnos de 3.º de ESO hay doble número de alumnos americanos que africanos y doble número de alumnos europeos que americanos.

- a) Elige una incógnita y plantea una ecuación que refleje el enunciado.
 b) ¿Cuántos alumnos hay de cada continente?

a) Sea x el número de alumnos africanos. Entonces la ecuación es $x + 2x + 4x = 28$.

b) Resolvemos: $7x = 28 \Rightarrow x = 4$. Hay 4 alumnos africanos, 8 americanos y 16 europeos.

8.72. (TIC) Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $\frac{x}{5} - \frac{x}{9} = \frac{x}{3} - 11$

d) $4(x-3) + \frac{x}{2} = -(x-4) + 1$

b) $3(x-4) + 2(3x-1) = 7x-18$

e) $3(2x-5) + 8x-6 = \frac{x}{2} - (5x+3)$

c) $-4(2x-1) + \frac{3x+1}{2} = -5x-3$

f) $\frac{x-4}{5} - 4(-2x+1) - \frac{(-4x+2)}{10} = 2(x-3) + \frac{5x+6}{2}$

a) $\frac{x}{5} - \frac{x}{9} = \frac{x}{3} - 11 \Rightarrow 9x - 5x = 15x - 495 \Rightarrow 495 = 11x \Rightarrow x = 45$

b) $3(x-4) + 2(3x-1) = 7x-18 \Rightarrow 3x-12+6x-2=7x-18 \Rightarrow 2x=-4 \Rightarrow x=-2$

c) $-4(2x-1) + \frac{3x+1}{2} = -5x-3 \Rightarrow -8x+4 + \frac{3x+1}{2} = -5x-3 \Rightarrow -3x = -15 \Rightarrow x = 5$

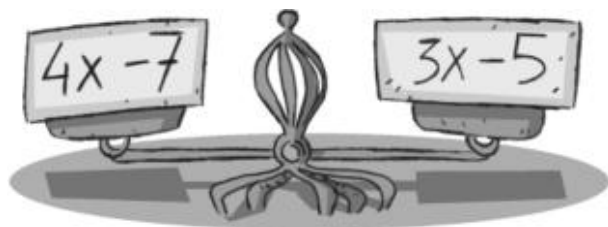
d) $4(x-3) + \frac{x}{2} = -(x-4) + 1 \Rightarrow 8x-24+x = -2x+8+2 \Rightarrow 11x = 34 \Rightarrow x = \frac{34}{11}$

e) $3(2x-5) + 8x-6 = \frac{x}{2} - (5x+3) \Rightarrow 28x-42 = x-10x-6 \Rightarrow 37x = 36 \Rightarrow x = \frac{36}{37}$

f) $\frac{x-4}{5} - 4(-2x+1) - \frac{(-4x+2)}{10} = 2(x-3) + \frac{5x+6}{2} \Rightarrow 2x-8-40(-2x+1) - (-4x+2) =$

$= 20(x-3) + 25x+30 \Rightarrow 86x-50 = 45x-30 \Rightarrow 41x = 20 \Rightarrow x = \frac{20}{41}$

8.73. Observa la balanza.



Encuentra un valor de la incógnita tal que la balanza:

- a) Se incline a la derecha.
 b) Se incline a la izquierda.
 c) Consiga el equilibrio.

a) $x = 1, 4 \cdot 1 - 7 = -3 < -2 = 3 \cdot 1 - 5$

b) $x = 3, 4 \cdot 3 - 7 = 5 > 4 = 3 \cdot 3 - 5$

c) $x = 2, 4 \cdot 2 - 7 = 1 = 1 = 3 \cdot 2 - 5$

8.74. Un grupo de 15 amigos contratan una excursión por 1 380 euros. Como algunos de ellos no tienen dinero, cada uno de los restantes pone 23 euros más de lo que le corresponde. ¿Cuántos son los amigos que no tienen dinero?

Sea x el número de amigos que tienen dinero. Entonces, los amigos que no tienen dinero son $15 - x$.

Lo que paga cada uno de los que tienen dinero es $\frac{1380}{x}$, que es lo mismo que lo que tendrían que pagar si pagasen todos y 23 euros más; $\frac{1380}{15} + 23$.

Resolvemos la ecuación $1380 \cdot 15 = 1380x + 23 \cdot 15x \Rightarrow 1380 = 115x \Rightarrow x = 12$.
Los amigos que no tienen dinero son 3.

Ecuaciones de segundo grado

8.75. Escribe en cada caso la ecuación de segundo grado que tenga estas soluciones.

- a) -3 y 4 b) 5 y -5 c) 0 y 3 d) -1 y -3

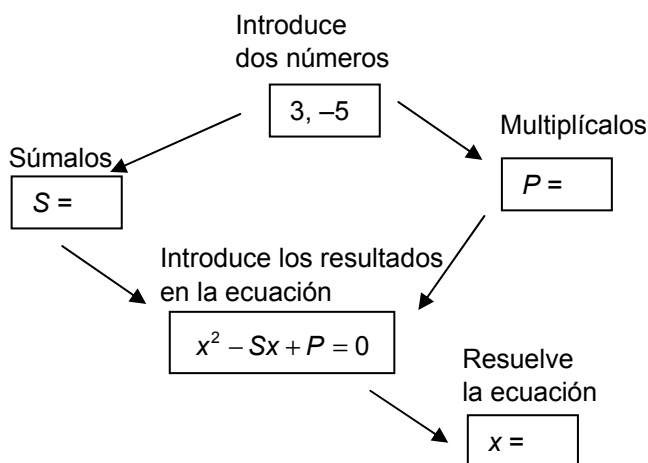
a) $x^2 - (-3 + 4)x + (-3) \cdot 4 = x^2 - x - 12 = 0$ c) $x^2 - (0 + 3)x + 0 \cdot 3 = x^2 - 3x = 0$
 b) $x^2 - (5 - 5)x + 5 \cdot (-5) = x^2 - 25 = 0$ d) $x^2 - (-1 - 3)x + (-1)(-3) = x^2 + 4x + 3 = 0$

8.76. Resuelve las ecuaciones incompletas de segundo grado.

- a) $5x^2 - 20x = 0$ b) $2x^2 - 32 = 0$ c) $17x^2 = 0$

a) $5x^2 - 20x = 0 \Rightarrow x \cdot (5x - 20) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 4$
 b) $2x^2 - 32 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 32 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4, x = -4$.
 c) $17x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

8.77. Copia y completa el gráfico.



$S = -2, P = -15$
 $x^2 + 2x - 15 = 0$
 $x = 3, x = -5$

8.78. Resuelve estas ecuaciones utilizando la fórmula explicada en la unidad.

a) $x^2 - 11x - 12 = 0$

b) $x^2 + 9x + 18 = 0$

a) $x = \frac{11 \pm \sqrt{121 + 48}}{2} = \frac{11 \pm 13}{2} = \begin{cases} 12 \\ -1 \end{cases}$

b) $x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 72}}{2} = \frac{-9 \pm 3}{2} = \begin{cases} -3 \\ -6 \end{cases}$

8.79. (TIC) Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $12x(2x - 3) = 0$

c) $7x^2 - 5 = 4x^2 + 12$

b) $x^2 - 3x - 10 = 0$

d) $8x^2 - 10x - 3 = 0$

a) $\left. \begin{array}{l} 12x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \end{array} \right\} x_1 = 0, y x_2 = \frac{3}{2}$

c) $3x^2 = 17 \Rightarrow x^2 = \frac{17}{3} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{17}{3}}$

b) $x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2} \Rightarrow x_1 = 5, x_2 = -2$

d) $x = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 96}}{16} = \frac{10 \pm 14}{16} \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = -\frac{1}{4}$

8.80. Completa la ecuación $5x^2 - 6x + c = 0$ asegurándote de que tenga dos soluciones distintas. ¿Cuántas soluciones existen?

$b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow 36 - 4 \cdot 5 \cdot c > 0 \Rightarrow 36 - 20c > 0 \Rightarrow 36 > 20c \Rightarrow \frac{36}{20} > c \Rightarrow \frac{18}{10} > c \Rightarrow \frac{9}{5} > c \Rightarrow \Rightarrow \infty$ soluciones

8.81. Halla el valor de c en la ecuación de segundo grado $x^2 - x + c = 0$, para que una de sus soluciones sea $x = 3$.

La suma de raíces es 1, $3 + x_2 = 1$; $x_2 = -2$.

El producto de raíces es c . Como las soluciones son 3 y $-2 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} s = 1 \\ p = -6 \end{array} \right\} \Rightarrow c = -6$.

8.82. Soluciona las ecuaciones sin usar la fórmula.

a) $(x + 3) \cdot (x - 6) = 0$

b) $(3x - 1) \cdot (2x + 5) = 0$

a) $x_1 = -3, x_2 = 6$

b) $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = -\frac{5}{2}$

8.83. Relaciona cada ecuación con su número de soluciones.

$3x^2 + x + 2 = 0$

2 soluciones

$x^2 - 5x + 1 = 0$

1 solución

$4x^2 + 4x + 1 = 0$

0 soluciones

Vemos el signo de los discriminantes.

$3x^2 + x + 2 = 0 \rightarrow 1^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 < 0 \rightarrow 0$ soluciones

$x^2 - 5x + 1 = 0 \rightarrow (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 > 0 \rightarrow 2$ soluciones

$4x^2 + 4x + 1 = 0 \rightarrow 4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 0 \rightarrow 1$ solución

8.84. ¿A qué ecuación corresponden las soluciones $x = -2$ y $x = 3$?

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$

c) $x^2 + 5x + 6 = 0$

b) $x^2 + x - 6 = 0$

d) $x^2 - x - 6 = 0$

a) $(-2)^2 - 5 \cdot (-2) + 6 = 20 \neq 0$; $3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 0$

b) $(-2)^2 + (-2) - 6 = -4 \neq 0$; $3^2 + 3 - 6 = 6 \neq 0$

c) $(-2)^2 + 5 \cdot (-2) + 6 = 0$; $3^2 + 5 \cdot 3 + 6 = 30 \neq 0$

d) $(-2)^2 - (-2) - 6 = 0$; $3^2 - 3 - 6 = 0$

Corresponden a la ecuación d.

8.85. ¿Cuál de los tres coeficientes de una ecuación de segundo grado nunca puede ser 0? Justifica tu respuesta.

No puede ser 0 el coeficiente que va con x^2 , porque si fuese 0, tendríamos una ecuación del tipo $0x^2 + bx + c = 0 \Rightarrow bx + c = 0$, que no es una ecuación de segundo grado.

8.86. ¿Qué valor debe tener c para que la solución de la ecuación $9x^2 - 30x + c = 0$ sea única?

Para que tenga solución única, el discriminante tiene que ser 0, $b^2 - 4ac = 0$, que en nuestro caso es $900 - 36c = 0 \Rightarrow c = 25$.

8.87. ¿Dos ecuaciones de segundo grado pueden tener las mismas soluciones?

Sí, $(x - 1)(x + 1) = 0$ tiene las mismas soluciones que $2(x - 1)(x + 1) = 0$.

8.88. ¿Dos ecuaciones de segundo grado pueden tener una solución común y la otra distinta? Justifica la respuesta.

Sí, las ecuaciones $(x - 1)(x + 1) = 0$ y $x \cdot (x + 1) = 0$ tienen en común la solución $x = -1$, y, sin embargo, la otra solución es diferente.

8.89. (TIC) Desarrolla las ecuaciones hasta conseguir escribirlas en la forma $ax^2 + bx + c = 0$, y, luego, resuélvelas.

a) $6x^2 - 1 + \frac{2x(-x + 3)}{3} = \frac{5x^2 - 2}{6} - 4x^2 + 2 + \frac{47}{6}$

b) $\frac{3(x^2 - 11)}{5} - \frac{2(x^2 - 60)}{7} = 36$

a) $6x^2 - 1 + \frac{2x(-x + 3)}{3} = \frac{5x^2 - 2}{6} - 4x^2 + 2 + \frac{47}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow 36x^2 - 6 + 4x(-x + 3) = 5x^2 - 2 - 24x^2 + 12 + 47 \Rightarrow 51x^2 + 12x - 63 = 0$

$x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 51 \cdot (-63)}}{2 \cdot 51} = \frac{-12 \pm 114}{102} = \left\langle \begin{matrix} -21 \\ 17 \\ 1 \end{matrix} \right.$

b) $\frac{3(x^2 - 11)}{5} - \frac{2(x^2 - 60)}{7} = 36 \Rightarrow 21(x^2 - 11) - 10(x^2 - 60) = 1260 \Rightarrow 11x^2 = 891 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 81 \Rightarrow x = \pm 9$

8.90. La suma de los catetos de un triángulo rectángulo es 14 centímetros y la hipotenusa mide 10 centímetros. Aplica el teorema de Pitágoras, utilizando una sola incógnita y halla el valor de los catetos.

Como la suma de los catetos es 14, tenemos que estos valen x y $14 - x$.
Entonces, por el teorema de Pitágoras: $10^2 = x^2 + (14 - x)^2 \Rightarrow x^2 - 14x + 48 = 0$.

$x = \frac{14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \cdot 1 \cdot 48}}{2 \cdot 1} = \frac{14 \pm 2}{2} = \left\langle \begin{matrix} 8 \\ 6 \end{matrix} \right.$

Los catetos miden 8 y 6 centímetros.

8.91. La ecuación $x^2 + x + c = 0$, ¿para qué valores de c tiene una solución? ¿Y dos soluciones? ¿Y ninguna solución?

Depende del valor del discriminante.

$$1 - 4c = 0 \Rightarrow c = \frac{1}{4}. \text{ Tiene una solución.}$$

$$1 - 4c > 0 \Rightarrow c < \frac{1}{4}. \text{ Tiene dos soluciones.}$$

$$1 - 4c < 0 \Rightarrow c > \frac{1}{4}. \text{ No tiene ninguna solución.}$$

8.92. Las ecuaciones del tipo $ax^4 + bx^2 + c = 0$ se llaman bicuadradas. Si se realiza el cambio de variable: $x^2 = z$ y $x^4 = z^2$, se transforma la ecuación bicuadrada en una ecuación de segundo grado en la variable z . Una vez aplicada la fórmula para obtener z , se deshace el cambio y se halla la solución. Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas.

a) $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$

b) $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$

a) Se realiza el cambio de variable: $x^4 - 25x^2 + 144 = 0 \quad \begin{cases} x^2 = z \\ x^4 = z^2 \end{cases}$

Se resuelve la ecuación de segundo grado:

$$z^2 - 25z + 144 = 0 \quad z = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 576}}{2} = \frac{25 \pm 7}{2} \quad z_1 = 16, z_2 = 9$$

Las soluciones son: $x_1 = 4, x_2 = -4, x_3 = 3, x_4 = -3$

b) Se realiza el cambio de variable: $x^4 - 26x^2 + 25 = 0 \quad \begin{cases} x^2 = z \\ x^4 = z^2 \end{cases}$

Se resuelve la ecuación de segundo grado:

$$z^2 - 26z + 25 = 0 \quad z = \frac{26 \pm \sqrt{676 - 100}}{2} = \frac{26 \pm 24}{2} \quad z_1 = 25, z_2 = 1$$

Las soluciones son: $x_1 = 5, x_2 = -5, x_3 = 1, x_4 = -1$

8.93. En un triángulo rectángulo, el lado mayor mide 3 centímetros más que el mediano y 54 más que el pequeño. ¿Cuánto miden sus lados?

El triángulo es rectángulo y el lado mayor es la hipotenusa:

$$(x + 3)^2 = x^2 + (x - 51)^2 \Rightarrow x^2 + 9 + 6x = x^2 + x^2 + 2601 - 102x \Rightarrow x^2 - 108x + 2592 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{108 \pm \sqrt{11664 - 10368}}{2} = \frac{108 \pm 36}{2} \Rightarrow x_1 = 72, x_2 = 36 \rightarrow \text{No es válida porque al restar 51}$$

quedaría un lado de longitud negativa. Los catetos miden 21 y 72 cm, y la hipotenusa, 75 cm.

Sistemas de ecuaciones

8.94. Halla el valor de a y b , para que se cumpla que los dos sistemas sean equivalentes.

$$\begin{cases} -4x + y = -3 \\ 7x + 2y = -5 \end{cases} \quad \begin{cases} 20x + ay = 15 \\ bx - 12y = c \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} -4x + y = -3 \\ 7x + 2y = -5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (-4x + y = -3) \cdot (-5) \\ (7x + 2y = -5) \cdot (-6) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 20x - 5y = 15 \\ -42x - 12y = 30 \end{array} \right\} \Rightarrow a = -5, b = -42, c = 30$$

8.95. (TIC) Resuelve por el método de sustitución.

a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x + 3y = 13 \\ 5x + y = 2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ -2x + y = -1 \end{cases} \Rightarrow y = 2 - x$; sustituyendo y en la segunda ecuación:
 $-2x + 2 - x = -1 \Rightarrow -3x = -3 \Rightarrow x = 1$, luego $y = 2 - 1 = 1$

b) $\begin{cases} -x + 3y = 13 \\ 5x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow y = 2 - 5x$; sustituyendo y en la primera ecuación:
 $-x + 3(2 - 5x) = 13 \Rightarrow -16x = 7 \Rightarrow x = \frac{-7}{16}$, luego $y = 2 - 5\left(\frac{-7}{16}\right) = \frac{67}{16}$

8.96. (TIC) Resuelve por el método de reducción.

a) $\begin{cases} 6x - y = 19 \\ -4x + 3y = -15 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 7y = -11 \\ 2x + 6y = -2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 6x - y = 19 \\ -4x + 3y = -15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 24x - 4y = 76 \\ -24x + 18y = -90 \end{cases}$
 $14y = -14 \Rightarrow y = -1$

b) $\begin{cases} x - 7y = -11 \\ 2x + 6y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 14y = 22 \\ 2x + 6y = -2 \end{cases}$
 $20y = 20 \Rightarrow y = 1$

$\begin{cases} 6x - y = 19 \\ -4x + 3y = -15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 18x - 3y = 57 \\ -4x + 3y = -15 \end{cases}$
 $14x = 42 \Rightarrow x = 3$

$\begin{cases} x - 7y = -11 \\ 2x + 6y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 42y = -66 \\ 14x + 42y = -14 \end{cases}$
 $20x = -80 \Rightarrow x = -4$

8.97. (TIC) Resuelve mediante el método de reducción.

a) $\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x + 4y = -1 \\ 3x - 6y = 5 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 2 \cdot (5x + 2y = 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 10x + 4y = 2 \end{cases}$
 $13x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{13}$

$\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 \cdot (3x - 4y = 7) \\ -3 \cdot (5x + 2y = 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15x - 20y = 35 \\ -15x - 6y = -3 \end{cases}$
 $-26y = 32 \Rightarrow y = -\frac{32}{26} = -\frac{16}{13}$

b) $\begin{cases} 5x + 4y = -1 \\ 3x - 6y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \cdot (5x + 4y = -1) \\ 2 \cdot (3x - 6y = 5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15x + 12y = -3 \\ 6x - 12y = 10 \end{cases}$
 $21x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$

$\begin{cases} 5x + 4y = -1 \\ 3x - 6y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \cdot (5x + 4y = -1) \\ -5 \cdot (3x - 6y = 5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15x + 12y = -3 \\ -15x + 30y = -25 \end{cases}$
 $42y = -28 \Rightarrow y = -\frac{28}{42} = -\frac{2}{3}$

8.98. (TIC) Resuelve gráficamente estos sistemas.

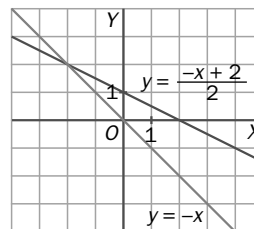
a) $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x + y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - y = -10 \\ 5x + y = 1 \end{cases}$

a) Se despeja y en las ecuaciones: $y = \frac{-x+2}{2}$; $y = -x$

x	$y = \frac{-x+2}{2}$
0	1
2	0

x	$y = -x$
0	0
1	-1

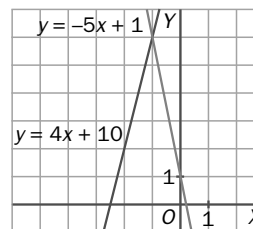


Solución: $x = -2$, $y = 2$

b) Se despeja y en las ecuaciones: $y = 4x + 10$; $y = -5x + 1$

x	$y = 4x + 10$
-2	2
-1	6

x	$y = -5x + 1$
0	1
1	-4



Solución: $x = -1$, $y = 6$

8.99. Indica, sin resolverlos, si estos sistemas son compatibles o incompatibles.

a) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x + y = 10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 2y - x = -1 \end{cases}$

a) Incompatible, porque tendríamos $7 = 10$.

b) Compatible.

8.100. Comprueba si los valores $x = -2$ e $y = 7$ son solución del sistema.

a) $\begin{cases} 5x + y = 3 \\ -3x + 2y = 20 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = -9 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 5 \cdot (-2) + 7 = -3 \neq 3 \\ -3 \cdot (-2) + 2 \cdot 7 = 20 \end{cases}$. No son solución.

b) $\begin{cases} -2 - 7 = -9 \\ 2 \cdot (-2) + 7 = 3 \end{cases}$. Sí son solución.

8.101. (TIC) Resuelve mediante el método de sustitución.

a) $\begin{cases} x = -4y + 2 \\ 3x + 5y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -2x + 3y = 1 \\ 2x - 7y = -5 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x = -4y + 2 \\ 3x + 5y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4y + 2 \\ 3(-4y + 2) + 5y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4y + 2 \\ -7y = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \cdot 1 + 2 = -2 \\ y = 1 \end{cases}$

Solución: $x = -2$, $y = 1$

b) $\begin{cases} -2x + 3y = 1 \\ 2x - 7y = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1-3y}{-2} \\ 2 \cdot \frac{1-3y}{-2} - 7y = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1-3y}{-2} \\ -4y = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1-3 \cdot 1}{-2} = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

Solución: $x = 1$, $y = 1$

8.102. Halla el valor de m y n , si $x = 2$ e $y = 1$ es solución del sistema.

$$\begin{cases} 3x + my = 2 \\ nx + 5y = 9 \end{cases}$$

Sustituimos en las ecuaciones del sistema las soluciones:

$$\begin{cases} 3x + my = 2 \\ nx + 5y = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 + m = 2 \\ 2n + 5 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 2 - 6 = -4 \\ 2n = 4 \Rightarrow n = 2 \end{cases}$$

8.103. Con las siguientes ecuaciones, plantea un sistema que tenga por solución $(-2, 1)$.

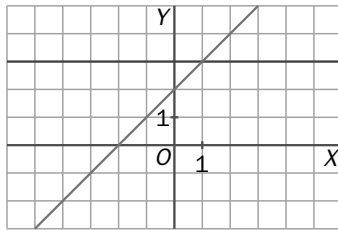
$$4x - y = -9 \quad 3x - 5y = 2 \quad 5x - y = 7 \quad x + 6y = 4$$

Las ecuaciones que forman un sistema con esa solución son: $\begin{cases} 4x - y = -9 \\ x + 6y = 4 \end{cases}$

8.104. La figura corresponde a la resolución gráfica de un sistema de ecuaciones lineales.

a) ¿Cuál es la solución?

b) Escribe las dos ecuaciones del sistema.



a) Solución: $x = 1, y = 3$

b) $y = x + 2, y = 3$

8.105. Plantea un sistema que tenga como solución $x = -3$ e $y = 5$.

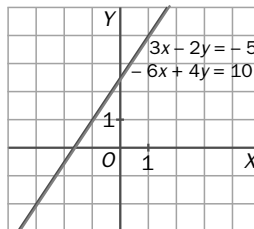
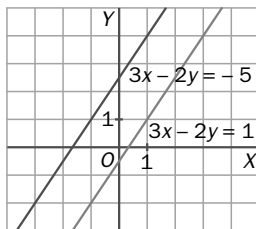
Respuesta abierta, por ejemplo:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = -8 \end{cases}$$

8.106. Sin resolverlos, indica cuántas soluciones tiene cada uno de estos sistemas.

a) $\begin{cases} 3x - 2y = -5 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 2y = -5 \\ -6x + 4y = 10 \end{cases}$



a) No tiene ninguna solución porque tenemos la igualdad $-5 = 1$, que es falsa.

b) Tiene infinitas soluciones porque la segunda ecuación es la primera multiplicada por -2 .

8.107. La suma de las dos cifras de un número es 11, y si se invierte el orden de sus cifras, el número aumenta en 9 unidades. ¿Cuál es el número?

x = cifra de las decenas
 y = cifra de las unidades

$$\Rightarrow x + y = 11$$

$$\Rightarrow (10y + x) - (10x + y) = 9$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 11 \\ -9x + 9y = 9 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 11 \\ -x + y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 2y = 12 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow x = 5$$

El número buscado es el 56.

PROBLEMAS

8.108. Mario gasta un viernes por la tarde en el cine $\frac{1}{2}$ del dinero que llevaba, y $\frac{1}{3}$ de lo que le queda en un bocata a la salida del cine. Vuelve a casa con 4 euros. ¿Cuánto dinero llevaba al salir de casa?

Si x es el dinero que llevaba al salir de casa, tenemos que:

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}x + 4 = x \Rightarrow 3x + x + 24 = 6x \Rightarrow 24 = 2x \Rightarrow x = 12$$

Mario salió de casa con 12 euros.

8.109. Durante el recreo, en la cafetería de mi instituto, compro todas las mañanas un bocadillo y un refresco. El bocadillo cuesta el triple que el refresco, y en total me cobran 1,80 euros. ¿Cuál es el precio del bocadillo?, ¿y el del refresco?

Sea x el precio del refresco, el del bocadillo es entonces $3x$.

$$3x + x = 1,8 \Rightarrow 4x = 1,8 \Rightarrow x = 0,45$$

El precio del bocadillo es 1,35 €, y el del refresco, 0,45 €.

8.110.(TIC) En un mercadillo solidario se venden dos tipos de figuras de artesanía. Unas a 1,50 euros y otras a 2,50 euros. Se vendieron 82 figuras y se obtuvieron 154 euros. ¿Cuántas unidades se vendieron de cada tipo?

Sean x el n.º de figuras vendidas de 1,50 €, e y , el n.º de figuras vendidas de 2,50 €.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 82 \\ 1,5x + 2,5y = 154 \end{array} \right\} \Rightarrow y = 82 - x \Rightarrow 1,5x + 2,5(82 - x) = 154 \Rightarrow 1,5x + 205 - 2,5x = 154 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x = -51 \Rightarrow x = 51 \Rightarrow y = 31$$

Se vendieron 51 unidades de figuras de 1,50 € y 31 unidades de 2,50 €.

8.111. En una clase de 3.º de ESO, la cuarta parte repiten curso. El director cambió a tres repetidores del grupo por otros tres de otro grupo que no habían repetido. Ahora solo repiten curso un séptimo del total. ¿Cuántos alumnos hay en la clase?

Sea x el n.º de alumnos de la clase.

Entonces $\frac{x}{4}$ es el n.º de repetidores antes.

$$\frac{x}{4} - 3 = \frac{1}{7}x \Rightarrow \frac{7x - 84}{28} = \frac{4x}{28} \Rightarrow 3x = 84 \Rightarrow x = 28$$

En clase hay 28 alumnos.

8.112.(TIC) Me faltan 4,10 euros para comprar mi pizza favorita. Si tuviera el triple de lo que tengo compraría 2 pizzas. ¿Cuánto cuesta la pizza y cuánto dinero llevo?

Sea x el precio de la pizza, entonces $x - 4,1$ es el dinero que llevo.

$$3(x - 4,1) = 2x \Rightarrow 3x - 12,3 = 2x \Rightarrow x = 12,3$$

La pizza vale 12,30 €. Llevo 8,20 €.

8.113. En una fiesta a la que acuden 42 personas, hay tres hombres más que mujeres y tantos niños como hombres y mujeres juntos. Halla el número de hombres, mujeres y niños.

Sea x el n.º de mujeres, entonces $x + 3$ es el n.º de hombres y $2x + 3$ es el n.º de niños.

$$x + x + 3 + 2x + 3 = 42 \Rightarrow 4x + 6 = 42 \Rightarrow 4x = 36 \Rightarrow x = 9$$

Hay 9 mujeres, 12 hombres y 21 niños.

8.114. Los coeficientes de una ecuación de segundo grado son 1, 2 y 5. Averigua cuál es el coeficiente de x si se sabe que la ecuación tiene dos soluciones distintas.

a	b	c	$b^2 - 4ac$
2	5	1	$25 - 8 = 17$
5	2	1	$4 - 20 = -16$
1	2	5	$4 - 20 = -16$
1	5	2	$25 - 8 = 17$
2	1	5	$1 - 40 = -39$
5	1	2	$1 - 40 = -39$

Si $b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow$ dos soluciones distintas, entonces la ecuación es $2x^2 + 5x + 1 = 0$ ó $x^2 + 5x + 2 = 0$. El coeficiente de x es 5.

8.115. La resolución de una ecuación de segundo grado se ha emborronado y hay partes que no se aprecian.

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{\dots}}{4} = \left\{ \begin{array}{l} \dots \\ -5 \end{array} \right.$$

¿Puedes averiguar la ecuación?

$$\left. \begin{array}{l} b = 9 \\ a = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-9 - 11}{4} = -5 \Rightarrow b^2 - 4ac = 121 \Rightarrow 81 - 8c = 121 \Rightarrow -8c = 40 \Rightarrow c = -5$$

La ecuación buscada es: $2x^2 + 9x - 5 = 0$.

8.116. Javier tiene 5 años más que su hermano Miguel y su madre tiene 42 años. Dentro de tres años, la edad de la madre será el triple que la suma de las edades de los hijos. ¿Cuál es la edad actual de cada uno?

Si x es la edad actual de Miguel, la edad actual de Javier es $x + 5$.

$$42 + 3 = 3(x + 3 + x + 5 + 3) \Rightarrow 45 = 3(2x + 11) \Rightarrow 12 = 6x \Rightarrow x = 2$$

Miguel tiene 2 años, y Javier, 7.

8.117. (TIC) En el Concurso Literario Anual, la asociación de padres y madres de alumnos de un instituto premia con libros, por un valor de 196 euros, a los alumnos que hayan presentado las tres mejores redacciones. Reparten el premio proporcionalmente a sus notas: 10; 9,5 y 8,5. ¿Cuánto dinero le corresponde a cada alumno premiado?

Si x es la constante de proporcionalidad:

$$10x + 9,5x + 8,5x = 196 \Rightarrow 28x = 196 \Rightarrow x = 7$$

A quien obtuvo un 10 le corresponden 70 €, quien obtuvo 9,5 recibirá 66,50 €, y la persona de puntuación 8,5 será premiada con 59,50 €.

8.118. Marta y Álex quedan todas las tardes en la biblioteca. Entre ambos recorren 6 kilómetros. Álex camina a una velocidad de 7 kilómetros por hora y Marta a 5 kilómetros por hora. Ambos salen de sus casas y llegan a la biblioteca al mismo tiempo.

- a) ¿Cuánto tardan en llegar a la biblioteca?
 b) ¿Cuál es la distancia de cada casa a la biblioteca?

$$v = \frac{e}{t}$$

$$t_A = t_B$$

$$\frac{e_A}{v_A} = \frac{e_B}{v_B} \Rightarrow \frac{x}{7} = \frac{6-x}{5} \Rightarrow 5x = 42 - 7x \Rightarrow 12x = 42 \Rightarrow x = 3,5$$

a) $t_A = \frac{3,5}{7} = 0,5 = 30$. Tardan 30 minutos en encontrarse.

b) La distancia de la biblioteca a casa de Alex es de 3,5 km, y a casa de Marta, de $6 - 3,5 = 2,5$ km.

8.119.(TIC) La diferencia entre el denominador y el numerador de una fracción es 18. Se sabe que si se suma 8 unidades a cada uno de los términos, la fracción resultante es equivalente a $\frac{3}{5}$. Halla la fracción.

$$\left. \begin{array}{l} y - x = 18 \\ \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{x+8}{y+8} = \frac{3}{5} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} y = x + 18 \\ \frac{x+8}{x+26} = \frac{3}{5} \end{array} \right\} \Rightarrow 5x + 40 = 3x + 78 \Rightarrow 2x = 38 \Rightarrow x = 19 \Rightarrow y = 37 \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{19}{37}$$

La fracción es $\frac{19}{37}$.

AMPLIACIÓN

8.120. Esteban le pide a Joaquín que reste 3 de cierto número y que divida el resultado entre 9. Joaquín, que no oye bien, resta 9 a ese número y divide el resultado entre 3, y obtiene 43. ¿Qué habría obtenido Joaquín si oyera bien?

- a) 15 b) 34 c) 51 d) 138

$$\frac{(43 \times 3 + 9) - 3}{9} = \frac{135}{9} = 15$$

La respuesta correcta es la a.

8.121. Yo tenía el doble de la edad que tenías tú cuando yo tenía la edad que tú tienes ahora. Cuando tú tengas la edad que yo tengo ahora, la suma de nuestras edades será de 133 años. ¿Cuál es la suma de nuestras edades en este momento?

- a) 90 b) 95 c) 100 d) 105

	Edad hace $(x - y)$ años	Edad actual	Edad dentro de $(x - y)$ años
Mi edad	y	x	$x + (x - y)$
Tu edad	$y - (x - y)$	y	x

$$\left. \begin{array}{l} y = 2[y - (x - y)] \\ x + [x + (x - y)] = 133 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 2x = 3y \\ 3x - y = 133 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 57 \\ y = 38 \end{array} \right\} \Rightarrow x + y = 95$$

La respuesta correcta es la b.

8.122. Juan tiene 3 hijos, dos niños gemelos y una niña. La suma de sus edades es 43, y la diferencia, 5. El producto de las edades de los tres es:

- a) 176 b) 1936 c) 2816 d) 10 944

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y = 43 \\ x - y = 5 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 3x = 48 \\ x - y = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 16 \\ y = 11 \end{array} \right\} \Rightarrow x \cdot x \cdot y = 16^2 \cdot 11 = 2816$$

La respuesta correcta es la c.

8.123. Un avión sale de una base aérea a las 8.00, llega al punto de destino, retorna inmediatamente y llega a las 11.30. Si la velocidad a la ida fue de 960 km/h y a la vuelta fue de 720 km/h, la diferencia de los tiempos empleados en una y otra fue de:

- a) 30 min b) 15 min c) 10 min d) 60 min

$$\left. \begin{array}{l} 960t_1 = 720t_2 \\ t_1 + t_2 = 3,5 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 4t_1 - 3t_2 = 0 \\ 3t_1 + 3t_2 = 10,5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} t_1 = 1,5 \\ t_2 = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow t_2 - t_1 = 0,5 \text{ h} = 30 \text{ min}$$

La respuesta correcta es la a.

8.124. La diagonal de un rectángulo de área 360 m² mide 41 m. La diferencia entre sus dimensiones es:

- a) 28 m b) 29 m c) 30 m d) 31 m

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 41^2 \\ x \cdot y = 360 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1681 \\ 2xy = 720 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} (x + y)^2 = 2401 \\ x \cdot y = 360 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 49 \\ x \cdot y = 360 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - 49x + 360 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 40 \\ x_2 = 9 \end{cases}$$

Si $x_1 = 40$, $y_1 = 9$ y recíprocamente; por tanto, la diferencia entre sus dimensiones es:
 $40 - 9 = 31 \text{ m}$

La respuesta correcta es la d.

AUTOEVALUACIÓN

8.1. Averigua cuál de las siguientes ecuaciones es una identidad.

- a) $9x = 27$ c) $x^2 - 36 = 0$
 b) $8x(2x - 3) = 16x^2 - 24x$ d) $\frac{x}{7} = 3$

La b, porque si operamos, vemos que hay lo mismo a los dos lados de la igualdad.

8.2. Resuelve estas ecuaciones.

a) $\frac{x}{9} - \frac{x}{3} = \frac{x+1}{7} - 10$ b) $-8(2x - 1) - 4 = -7x - 23$

a) $\frac{x}{9} - \frac{x}{3} = \frac{x+1}{7} - 10 \Rightarrow 7x - 21x = 9(x+1) - 630 \Rightarrow -23x = -621 \Rightarrow x = 27$

b) $-8(2x - 1) - 4 = -7x - 23 \Rightarrow -16x + 8 - 4 = -7x - 23 \Rightarrow 27 = 9x \Rightarrow x = 3$

8.3. Escribe la ecuación de segundo grado que tiene por soluciones $x = \frac{2}{3}$ y $x = -4$.

$$\left(x - \frac{2}{3}\right)(x + 4) = x^2 + \frac{10}{3}x - \frac{8}{3} = 0 \Rightarrow 3x^2 + 10x - 8 = 0$$

- 8.4. En el garaje de una comunidad de vecinos hay un total de 31 vehículos entre coches y motos y 98 ruedas tocan el suelo del garaje. ¿Cuántos coches y cuántas motos hay en total?

Sea x el número de coches e y el número de motos.

$$\begin{cases} x + y = 31 \\ 4x + 2y = 98 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 31 - y \\ 4(31 - y) + 2y = 98 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 31 - y \\ -2y = -26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 31 - 13 = 18 \\ y = 13 \end{cases}$$

Hay 18 coches y 13 motos.

- 8.5. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $2x^2 - 3x - 5 = 0$

b) $x^2 - 4x + 4 = 0$

a) $x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{4} = \frac{3 \pm 7}{4} = \begin{cases} \frac{5}{2} \\ -1 \end{cases}$

b) $x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = 2$

- 8.6. Halla el valor de a y b , para que el siguiente sistema tenga como solución $x = -3$ e $y = 4$.

$$\begin{cases} -2x + 5y = a \\ 3x - y = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x + 5y = a \\ 3x - y = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \cdot (-3) + 5 \cdot 4 = a \\ 3 \cdot (-3) - 4 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 26 = a \\ -13 = b \end{cases}$$

- 8.7. Averigua si el siguiente sistema es compatible o incompatible sin resolverlo.

$$\begin{cases} -5x + 2y = 6 \\ 10x - 4y = -8 \end{cases}$$

Es incompatible porque si multiplicamos la primera ecuación por -2 , tenemos una equivalente que es $10x - 4y = -12$, y al resolver tendríamos que $-8 = -12$, lo cual es falso.

- 8.8. Resuelve estos sistemas de ecuaciones lineales.

a) $\begin{cases} 5x + y = -6 \\ -2x + 7y = -5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 4y = -15 \\ -5x + 4y = 17 \end{cases}$

a) Sustitución: $\begin{cases} 5x + y = -6 \\ -2x + 7y = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -6 - 5x \\ -2x + 7(-6 - 5x) = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -6 - 5x \\ -37x = 37 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = -1 \end{cases}$

b) Reducción. Sumando las dos ecuaciones: $-2x = 2 \Rightarrow x = -1$

$$\begin{cases} 3x - 4y = -15 \\ -5x + 4y = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5(3x - 4y = -15) \\ 3(-5x + 4y = 17) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15x - 20y = -75 \\ -15x + 12y = 51 \end{cases} \Rightarrow -8y = -24 \Rightarrow y = 3$$

- 8.9. Halla un número tal que la diferencia entre su cuádruplo y su cuarta parte sea 45.

Sea x el número.

$$4x - \frac{x}{4} = 45 \Rightarrow 16x - x = 180 \Rightarrow x = 12$$

El número es 12.

PON A PRUEBA TUS COMPETENCIAS

Reflexiona y deduce > El cesto de manzanas

- 8.1. El epigrama anterior plantea un problema. Redáctalo utilizando un lenguaje más actual e indica claramente cuál es la incógnita.

Una señora tiene un cesto de manzanas. Su hija Ino toma dos sextos de las manzanas; la siguiente, Sémele, coge un octavo, y Autonoé, un cuarto. La hija menor, Ágave, tomó un quinto y se fue. Si la madre deja 10 manzanas para su único hijo y le queda tan solo una manzana para ella, ¿cuántas manzanas tenía el cesto?

- 8.2. Justifica por qué el número de manzanas debe ser múltiplo de 3, 4, 5 y 8.

Para que al tomar $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{8}$, el número de manzanas sea un número entero.

- 8.3. Resuelve por tanteo el problema.

Busco un múltiplo común de 3, 4, 5 y 8, y pruebo para saber cuántas manzanas quedan. Si tomo el m.c.m., que es 120, resulta que Ino toma 40; Autonoé, 30; Sémele, 15, y Ágave, 24, con lo que quedarían: $120 - (40 + 30 + 15 + 24 + 10) = 120 - 119 = 1$, que es justo lo que dice el enunciado. La respuesta es 120 manzanas.

- 8.4. Escribe con lenguaje algebraico el problema y resuélvelo.

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{8} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} + 10 + 1 = x \Rightarrow 40x + 15x + 30x + 24x + 1320 = 120x \Rightarrow 1320 = 11x \Rightarrow x = 120$$

- 8.5. ¿Cuántas manzanas había en total en el cesto? ¿Cuántas manzanas coge cada una de las hijas de Cadmo?

Había 120 manzanas. Ino toma 40; Autonoé, 30; Sémele, 15, y Ágave, 24.

- 8.6. Investiga en la red y busca otros epigramas griegos con problemas matemáticos. ¿Eres capaz de formularlos en lenguaje actual y resolverlos?

Respuesta libre

Calcula y resuelve > El reparto del botín

- 8.1. Si llamamos x al número de monedas que tenía el cofre al principio, escribe la expresión que indica las monedas que coge el segundo pirata.

$$\frac{\left[\frac{2(x-1)}{3} - 1 \right]}{3} = \frac{2x-5}{9}$$

- 8.2. Si llamamos y al número de monedas que cogió el segundo pirata, escribe la expresión que nos indica cuántas monedas cogió el tercero.

$$\frac{2y - 1}{3}$$

- 8.3. Plantea una ecuación o un sistema de ecuaciones para averiguar cuántas monedas tenía el cofre y resuélvelo.

El tercero dejó $2 \cdot \frac{2y - 1}{3} = 30 \Rightarrow 2y - 1 = 45 \Rightarrow y = 23$.

Como $y = \frac{2x - 5}{9}$, se obtiene: $23 = \frac{2x - 5}{9} \Rightarrow 207 = 2x - 5 \Rightarrow 212 = 2x \Rightarrow x = 106$.

Razona y descubre > ¡No olvides el PIN!

- 8.1. ¿Por qué al año que viene no vale la fórmula de Irene?

Porque el año que viene cada uno de ellos tendrá un año más.

- 8.2. ¿Por qué al año que viene tampoco vale la fórmula de Pablo?

Por la misma razón.

- 8.3. ¿En qué año se produjo el descubrimiento de América? ¿Es relevante este dato para el problema?

En 1492, y es suficiente para determinar el PIN mediante la ecuación:

$$\frac{N}{4} + 210 = 1492 \Rightarrow N = 5128$$

- 8.4. ¿Qué números de PIN cumplen la primera observación de Marta?

Los únicos números cuyo cubo es otro número de tres cifras son: $5^3 = 125$, $6^3 = 216$, $7^3 = 343$, $8^3 = 512$ y $9^3 = 729$, con lo que obtenemos las siguientes posibilidades: 1255, 2166, 3437, 5128 y 7299.

- 8.5. ¿Cuál es el PIN? Averígualo por los tres métodos.

De los números que cumplen la condición de Marta, el único que tiene las cuatro cifras distintas es 5128.

Por el método de Irene tendremos: $4 \cdot 14 + (44 + 43) = 143$, que es la diferencia entre dos cuadrados consecutivos. Como sabemos que esta es igual a $(2n + 1)$, se deduce que: $2n + 1 = 143 \Rightarrow n = 71$.

Los dos cuadrados consecutivos son: $71^2 = 5041$ y $72^2 = 5184$.

Luego el PIN es $5184 - 4 \cdot 14 = 5128$

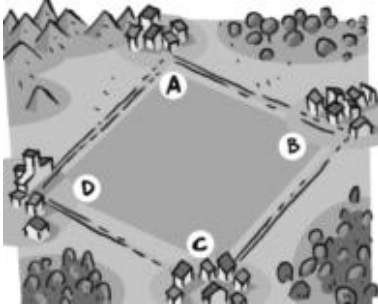
- 8.6. Inventa tu propia fórmula para recordar fácilmente este número de PIN y otra para el de tu móvil.

Respuesta libre

Aprende a pensar > La incineradora

Juntaos en grupos de cuatro; cada uno será el alcalde de uno de los cuatro pueblos. Vuestro objetivo final es decidir en qué punto del cuadrado situaréis la incineradora. Para ello podéis considerar algunos o todos los datos y hacer los cálculos que necesitéis. Cada alcalde deberá negociar de acuerdo con los intereses de su pueblo. Al final de la negociación, exponed vuestra solución en clase y concluid entre todos cuál os parece la mejor. ¿Crees que las incineradoras contaminan el medio ambiente? ¿Te parece adecuado situarlas cerca de las poblaciones? Entra en <http://matematicas20.aprenderapensar.net/> y participa en el debate.

Respuesta libre



Proyecto editorial: **Equipo de Educación Secundaria del Grupo SM**

Autoría: **Rafaela Arévalo, José Luis González, Juan Alberto Torresano**

Edición: **Elena Calvo, Miguel Ángel Ingelmo, Yolanda Zárate**

Corrección: **Ricardo Ramírez**

Ilustración: **Félix Anaya, Modesto Arregui, Juan Francisco Cobos, Domingo Duque, Félix Moreno,**

Diseño: **Pablo Canelas, Alfonso Ruano**

Maquetación: **SAFEKAT S. L.**

Coordinación de diseño: **José Luis Rodríguez**

Coordinación editorial: **Josefina Arévalo**

Dirección del proyecto: **Aída Moya**

Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra solo puede ser realizada con la autorización de sus titulares, salvo excepción prevista por la ley. Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.org) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra, a excepción de las páginas que incluyen la leyenda de “Página fotocopiable”.

© Ediciones SM

Impreso en España – *Printed in Spain*