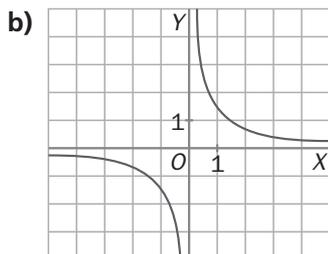
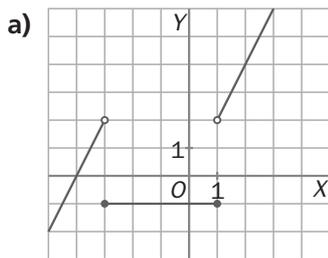


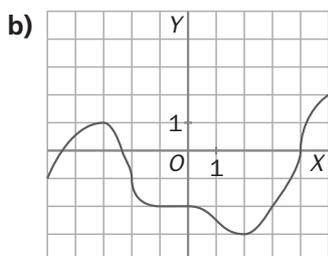
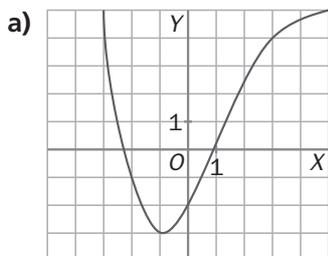
12.6 Indica en qué puntos son discontinuas estas funciones.



a) $x = -3, x = 1$

b) $x = 0$

12.7 Halla la tasa de variación de estas funciones en el intervalo $[-2, 3]$.



a) $TV[-2, 3] = f(3) - f(-2) = 4 - (-1) = 5$

b) $TV[-2, 3] = f(3) - f(-2) = -2 - (-1) = -1$

12.8 Para las funciones siguientes, halla la tasa de variación en los intervalos $[0, 1]$ y $[3, 4]$.

a) $f(x) = 5$

b) $f(x) = 2x + 3$

c) $f(x) = x^3$

a) $TV[0, 1] = f(1) - f(0) = 5 - 5 = 0$

$TV[3, 4] = f(4) - f(3) = 5 - 5 = 0$

b) $TV[0, 1] = f(1) - f(0) = 5 - 3 = 2$

$TV[3, 4] = f(4) - f(3) = 11 - 9 = 2$

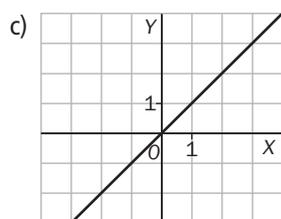
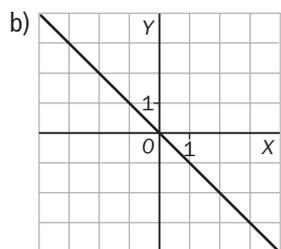
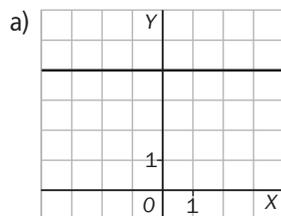
c) $TV[0, 1] = f(1) - f(0) = 1 - 0 = 1$

$TV[3, 4] = f(4) - f(3) = 64 - 27 = 37$

12.9 Dibuja un ejemplo de una función:

- a) Con tasa de variación nula en cualquier intervalo.
- b) Con tasa de variación negativa.
- c) Con tasa de variación positiva.

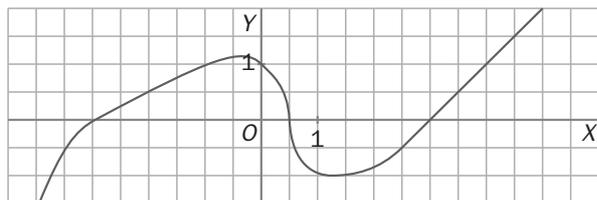
Respuesta abierta.



12.10 Analiza el crecimiento o decrecimiento de esta función en los intervalos.

a) $[-3, -1]$

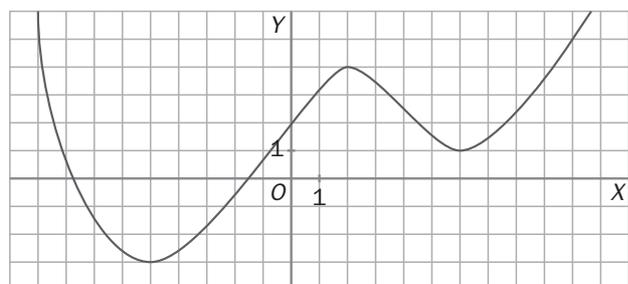
b) $[0, 1]$



a) Creciente

b) Decreciente

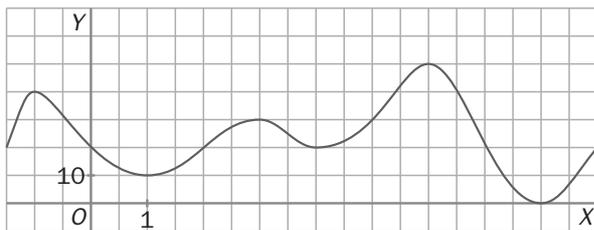
12.11 Indica dónde crece o decrece la siguiente función.



Crece: $[-5, 2] \cup [6, +\infty)$

Decrece: $(-\infty, -5] \cup [2, 6]$

12.12 Determina los máximos y mínimos de la función.

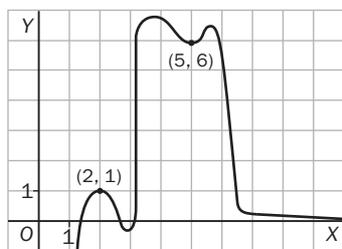


Máximos relativos: $(-1, 40)$, $(3, 30)$, $(6, 50)$
 Máximo absoluto: $(6, 50)$

Mínimos relativos: $(1, 10)$, $(4, 20)$, $(8, 0)$
 Mínimo absoluto: $(8, 0)$

12.13 Dibuja la gráfica de una función continua que tenga un máximo en el punto $(2, 1)$ y un mínimo en el punto $(5, 6)$.

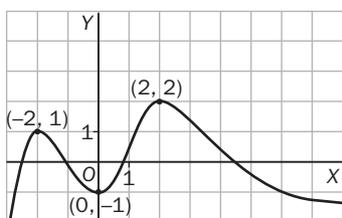
Respuesta abierta.



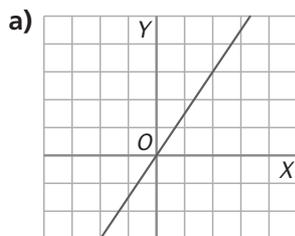
12.14 Representa una función continua que tenga:

- Un máximo en el punto $(-2, 1)$.
- Un máximo absoluto en el punto de abscisa $x = 2$.
- Un mínimo en el punto de abscisa $x = 0$.
- Sin mínimo absoluto.

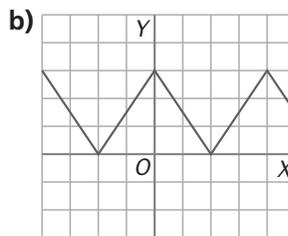
Respuesta abierta.



12.15 Indica si las siguientes funciones son simétricas.

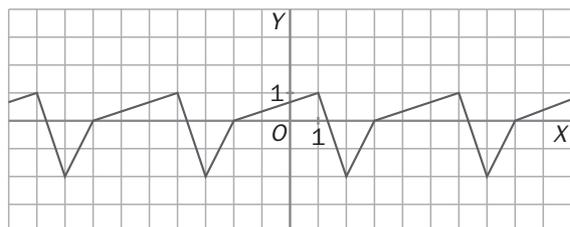


a) Sí, es simétrica respecto al origen.



b) Sí, es simétrica respecto al eje de ordenadas.

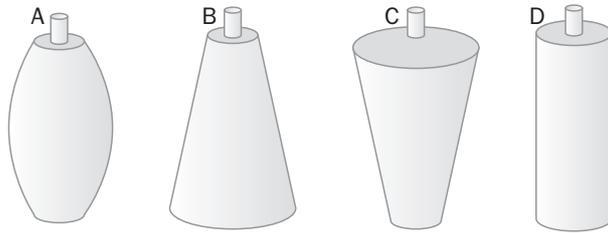
12.16 Determina si es periódica la función y , en caso afirmativo, halla su período.



Es periódica, con período 5.

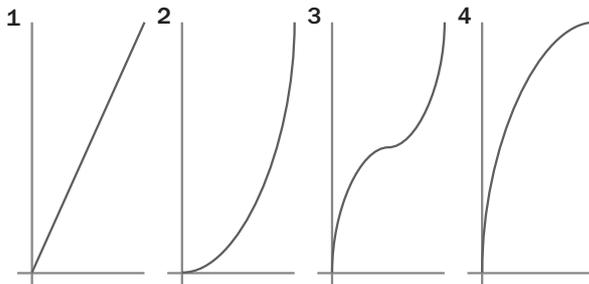
PROBLEMAS PROPUESTOS

12.17 En un laboratorio hay 4 probetas de igual capacidad.



Se procede a llenar las 4 probetas con un grifo y se va anotando el volumen de agua y la altura alcanzada en cada probeta.

Posteriormente, se representan estos datos y se obtienen las siguientes gráficas.



Asigna a cada probeta su gráfica correspondiente.

A3, B2, C4, D1.

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

Concepto de dependencia y función

12.18 ¿Qué dos magnitudes están relacionadas en cada una de estas fórmulas?

a) $L = 2\pi \cdot r$

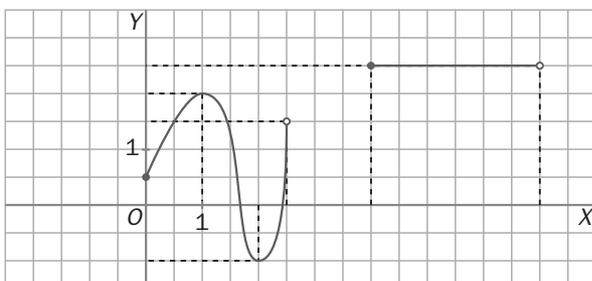
c) $A = l^2$

b) $A = \pi \cdot r^2$

d) $E = 166,386 p$

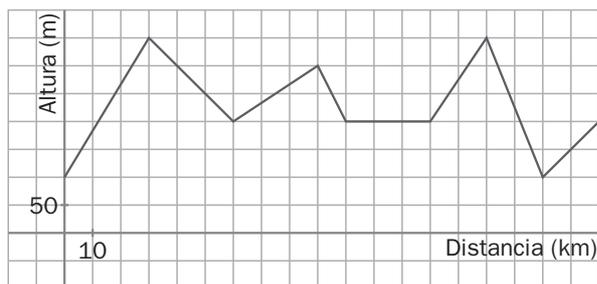
- a) La longitud de la circunferencia y su radio.
- b) El área del círculo y su radio.
- c) El área del cuadrado y su lado.
- d) El valor de los euros y el de las pesetas.

12.19 Averigua el dominio y el recorrido de la siguiente función expresada por una gráfica.



Dominio = $[0; 2,5) \cup [4, 7)$; recorrido = $[-1; 2] \cup \{2, 5\}$

12.20 La gráfica muestra el perfil de una etapa de una vuelta ciclista.



¿Entre qué kilómetros la altura permanece constante?

La altura permanece constante entre los 40 y 60 km.

12.21 Escribe la fórmula que convierte hectómetros en decámetros y a la inversa. Indica en cada caso cuáles son las variables dependiente e independiente.

Paso de hm a dam: $1 \text{ hm} = 10 \text{ dam}$

Variable independiente: hm; variable dependiente: dam

Paso de dam a hm: $1 \text{ dam} = \frac{1}{10} \text{ hm}$

Variable independiente: dam; variable dependiente: hm

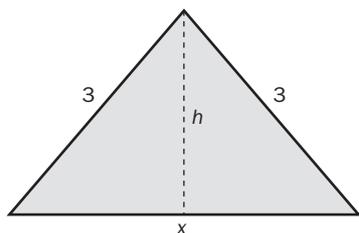
12.22 Halla la fórmula que permite obtener el área de un triángulo isósceles de lados 3, 3 y x centímetros, en función del lado desigual.

$$A_{\text{triángulo}} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{x \cdot h}{2}$$

Aplicamos el teorema de Pitágoras a cualquiera de los dos triángulos rectángulos que se obtienen al trazar la altura desde el vértice que une los lados iguales:

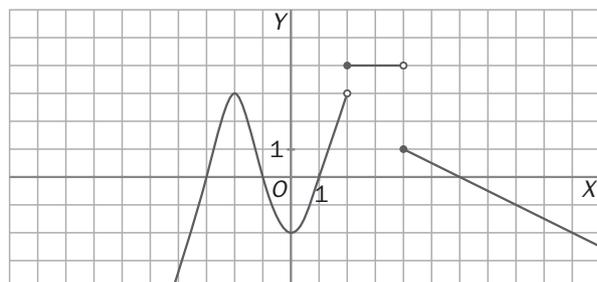
$$3^2 = h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow 9 = h^2 + \frac{x^2}{4} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{36 - x^2}}{2}$$

$$\text{Con lo que el área buscada es: } A_{\text{triángulo}} = \frac{\frac{x \cdot \sqrt{36 - x^2}}{2}}{2} = \frac{x \cdot \sqrt{36 - x^2}}{4}$$



Continuidad y variación de una función

12.23 Estudia la continuidad de la siguiente función.



Continua en: $(-\infty, 2) \cup (2, 4) \cup (4, +\infty)$; discontinua en: $\{2, 4\}$

12.24 ¿Cuál de las siguientes funciones tiene la tasa de variación mayor en el intervalo $\left[0, \frac{1}{4}\right]$?

a) $y = x^2$

b) $y = 2x$

c) $y = 2^x$

	$y = x^2$	$y = 2x$	$y = 2^x$
$f(0)$	0	0	1
$f\left(\frac{1}{4}\right)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt[4]{2}$
Tasa	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}$	0,189
En decimales	0,0625	0,5	0,189

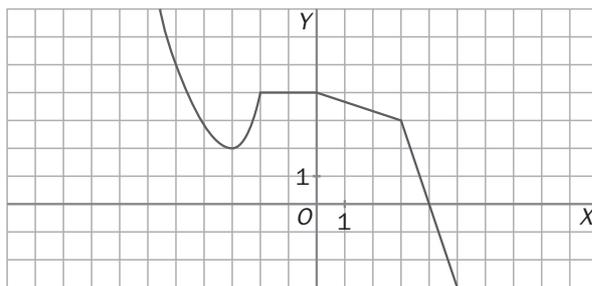
La mayor tasa la tiene la función $y = 2x$.

12.25 Calcula la tasa de variación de la función en estos intervalos.

a) $[-3, -2]$

b) $[-2, 0]$

c) $[3, 4]$



a) $TV[-3, -2] = f(-2) - f(-3) = 4 - 2 = 2$

b) $TV[-2, 0] = f(0) - f(-2) = 4 - 4 = 0$

c) $TV[3, 4] = f(4) - f(3) = 0 - 3 = -3$

12.26 Un anuncio por palabras en un diario cuesta 2,80 euros por palabra y se establece un mínimo de tres palabras para poder ser admitido.

a) Elabora una tabla y una gráfica de la función que relaciona el número de palabras con el precio del anuncio.

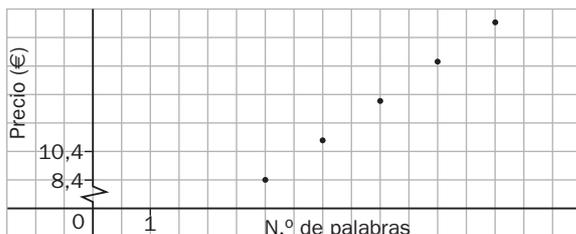
b) ¿Es continua la función?

c) ¿Dónde se producen discontinuidades?

d) ¿Existe algún intervalo donde la función sea continua?

a)

N.º de palabras	3	4	5	...
Precio (€)	8,4	11,2	14	...

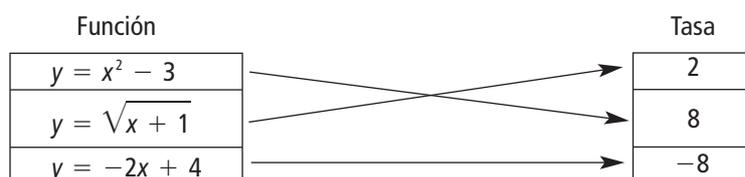


b) No

c) En todos los puntos

d) No

12.27 Une cada función con su tasa de variación en el intervalo $[-1, 3]$.



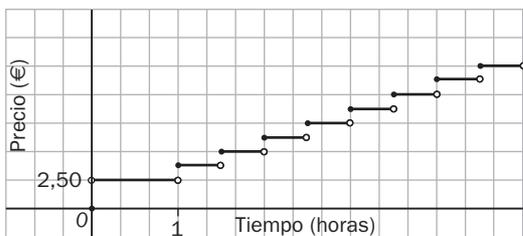
12.28 Un parking público expone este anuncio con sus tarifas.



- a) Elabora una tabla y una grafica de la situación.
 b) ¿Es continua la función? ¿Dónde se producen discontinuidades?

a)

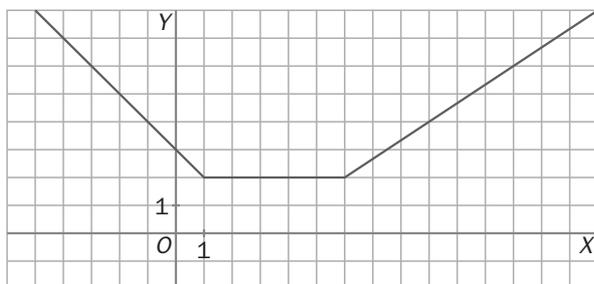
N.º de horas	0	$\frac{1}{2}$	1	1,5	2	2,5	3	...	19	20
Precio (€)	0	2,5	2,5	3,75	5	6,25	7,5	...	25	25



- b) No es continua. Las discontinuidades se producen en $\{1\}$, $\{1,5\}$, $\{2\}$, $\{2,5\}$, ...

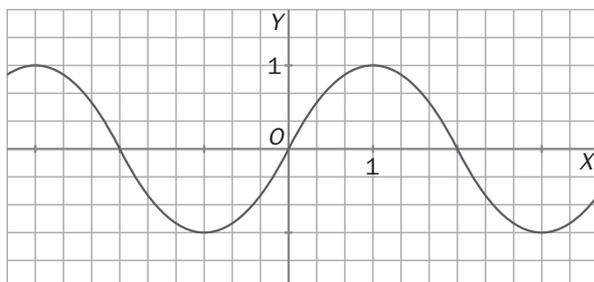
Crecimiento, simetría y periodicidad

12.29 Una función viene dada por esta gráfica.



- a) Indica los intervalos donde la función es creciente, constante o decreciente.
 b) ¿Qué signo tiene la tasa de variación en los intervalos $[2, 3]$, $[6, 10]$ y $[-5, -1]$?
- a) Crece en $(6, +\infty)$; decrece en $(-\infty, 1)$; es constante en $(1, 6)$.
 b) La tasa en $[2, 3]$ es igual a 0; en $[6, 10]$ es positiva, y en $[-5, -1]$ es negativa.

12.30 Observa esta función y contesta a las preguntas.

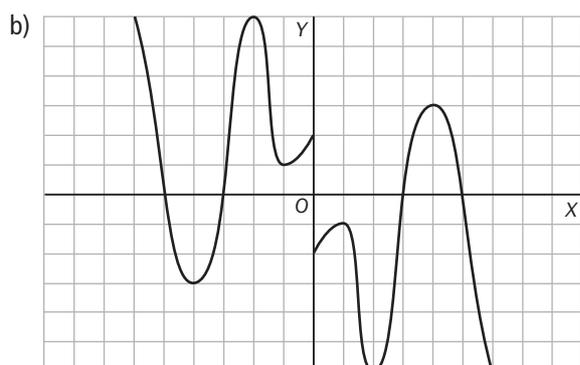
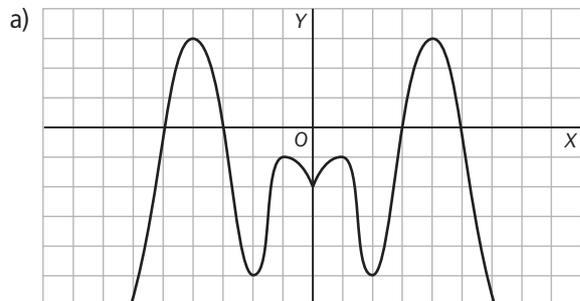
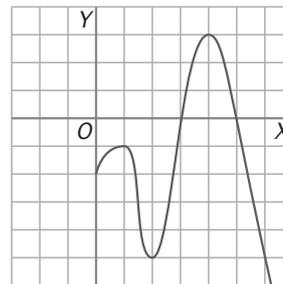


- a) ¿Cuáles son los máximos y mínimos de la función en el intervalo $[-2, 2]$? ¿Son absolutos o relativos?
 b) Sabiendo que la función es periódica, ¿cuántos máximos y mínimos tiene la función?
- a) Máximo en $(1, 1)$ y mínimo en $(-1, -1)$. Son absolutos y relativos.
 b) Infinitos

12.31 Completa la gráfica de la siguiente función para que tenga la simetría que se indica.

a) Par

b) Impar



12.32 Indica si estas funciones tienen simetría par o impar.

a) $f(x) = \frac{1}{x}$

b) $g(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

c) $h(x) = \frac{x^2}{x^4 + 1}$

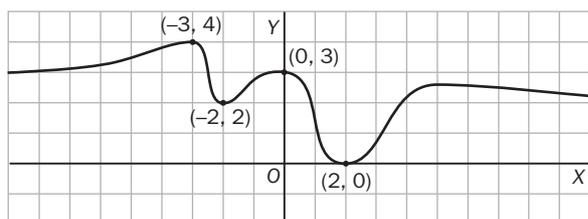
a) Impar. $f(-x) = \frac{1}{-x} = -f(x)$

b) Impar. $g(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 + 1} = -g(x)$

c) Par. $h(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^4 + 1} = h(x)$

12.33 Representa la gráfica de una función continua con un máximo absoluto en $(-3, 4)$, un máximo relativo en $(0, 3)$, un mínimo absoluto en $(2, 0)$ y un mínimo relativo en $(-2, 2)$.

Respuesta abierta.



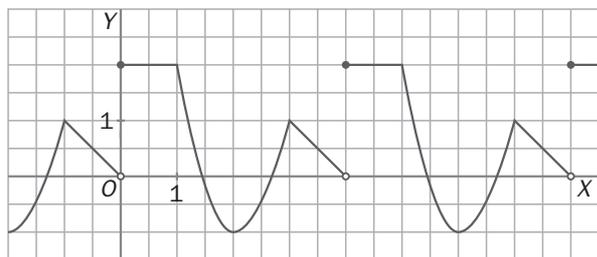
12.34 Halla el valor de la siguiente función periódica en estos puntos.

a) 17

b) -6

c) -34

d) 121



a) $f(17) = 2$

b) $f(-6) = -1$

c) $f(-34) = -1$

d) $f(121) = 2$

CUESTIONES PARA ACLARARSE

12.35 ¿Cuáles de estas relaciones corresponden a funciones?

a) A cada número le hacemos corresponder sus divisores.

b) A cada persona, el día de su nacimiento.

c) A cada persona, el nombre de sus hijos.

d) A cada hijo, el nombre de su padre.

e) A cada número, su raíz cúbica.

Son funciones b y e.

12.36 Completa la tabla de esta función, sabiendo que tiene simetría impar.

x	-3	2	0	-2	3	5	$-\sqrt{25}$
y	$\frac{1}{2}$	-5	1	5	$-\frac{1}{2}$	-7	7

12.37 ¿Dónde alcanzará los máximos y los mínimos una función cuyo estudio del crecimiento es el siguiente?

Crece en los intervalos $(-\infty, -5)$ y $(-2, 4)$.

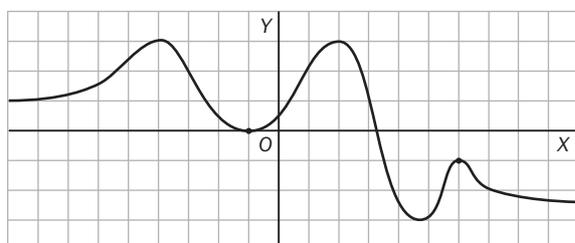
Decrece en los intervalos $(-5, -2)$ y $(4, +\infty)$.

Alcanza un máximo en $x = -5$ y otro en $x = 4$.

Alcanza un mínimo en $x = -2$.

12.38 ¿Puede existir un mínimo con ordenada mayor que la ordenada en un máximo? ¿Y un máximo con ordenada menor que la ordenada en un mínimo? Dibuja las situaciones anteriores con gráficas de funciones.

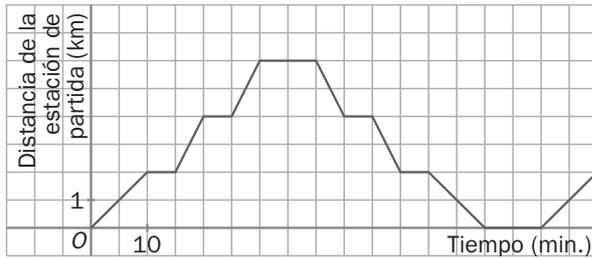
Sí, ambas situaciones son posibles, como se ve en la gráfica de esta función.



12.39 Si se establece la relación "A cada número le corresponden sus factores primos", ¿cuál tendría que ser su dominio para que fuera una función?

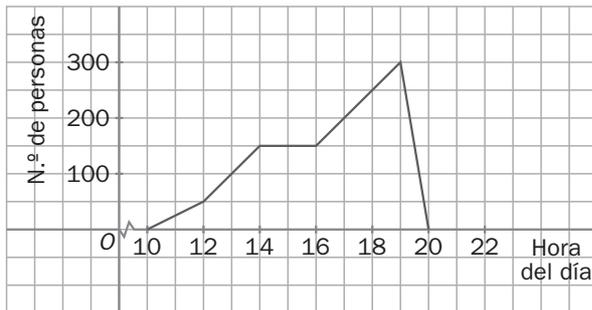
El dominio de la función tendría que ser $\{1\}$, ya que es el único valor al que le correspondería una sola imagen.

- 12.42 Un autobús universitario realiza cada día dos paradas, además de la inicial, para recoger estudiantes. La gráfica muestra su recorrido diario.



- Es periódica la función? Si la respuesta es afirmativa indica el período.
 - ¿A cuántos kilómetros está la universidad?
 - ¿Cuánto tiempo tarda en realizar el trayecto a la universidad?
 - ¿Cuánto tiempo está parado en todo su recorrido?
 - ¿Qué significa el decrecimiento de la gráfica?
- Sí. El período es de 80 minutos.
 - A 6 km.
 - 30 minutos
 - 40 minutos
 - Significa que vuelve a la estación.

- 12.43 La afluencia a una piscina pública, a lo largo de un día de verano, viene dada por esta gráfica.



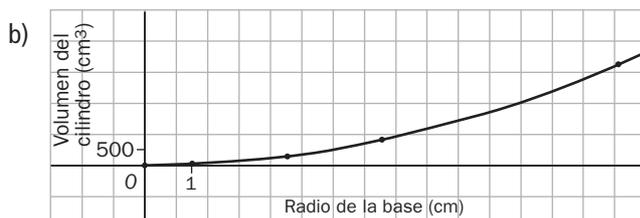
Observa la gráfica y determina estos datos.

- El horario de la piscina.
 - El máximo número de personas en la piscina y la hora en que se produce.
 - Los períodos de decrecimiento de afluencia de personas.
- De 10.00 a 20.00
 - 300 personas a las 19.00
 - De 19.00 a 20.00, porque se van marchando.

- 12.44 La tabla relaciona el volumen de los cilindros de 10 centímetros de altura con el radio de su base.

x (radio base)	1	3	5	10
y (volumen cilindro)	10π	90π	250π	1000π

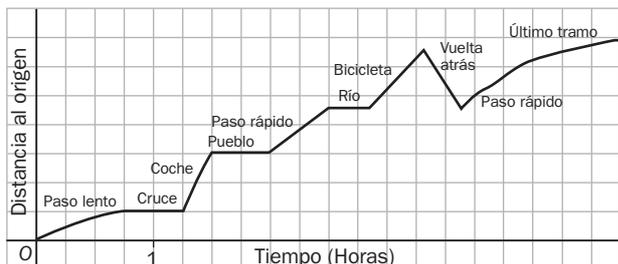
- Halla la ecuación de la relación.
 - Construye la gráfica de la función que relaciona el volumen de los cilindros con el radio de la base.
- $y = \pi \cdot x^2 \cdot 10 = 10\pi x^2$



12.45 Un peregrino explica a otro cómo había transcurrido la etapa del camino de Santiago que acababa de terminar:

«Comencé a caminar con todo el grupo charlando tranquilamente hasta llegar a una encrucijada de caminos donde no se distinguían las señales auténticas. Estuvimos allí media hora hasta que Ricardo encontró un cruceiro con la flecha amarilla. Como andábamos retrasados, a María y a mí un lugareño nos acercó en coche hasta el siguiente pueblo. Ya descansados, y cuesta abajo, hicimos un tramo a bastante ritmo hasta un bosque de hayas con un río donde nos dimos un chapuzón con unos franceses. Como los franceses marchaban en bicicleta nos llevaron "de paquete" unos kilómetros, pero Ricardo se olvidó su carné de peregrino en el río y tuvimos que volver con los franceses a buscarlo. Les dijimos que nos llevaran las mochilas para ir más ligeros hasta el final de la etapa. Fuimos bastante rápido hasta llegar al último tramo del puerto del Cebreiro, donde llegamos exhaustos.»

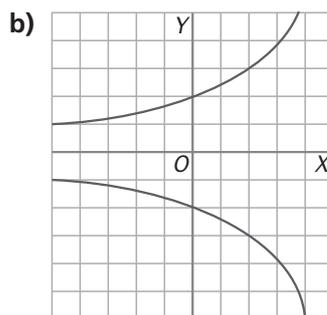
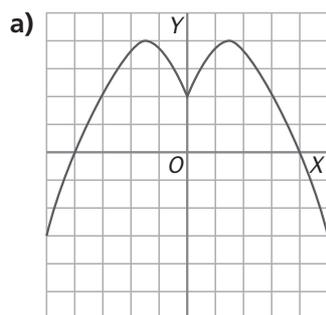
Dibuja la gráfica que indica la relación entre la distancia al punto de partida y el tiempo.



REFUERZO

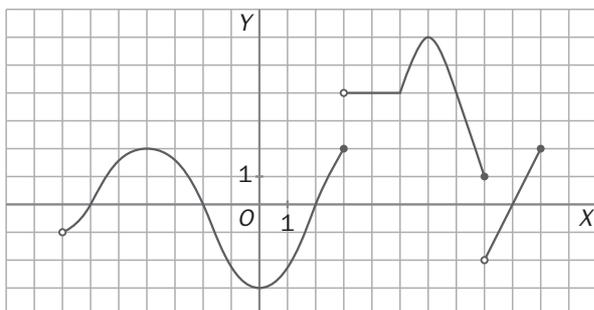
Función. Continuidad y tasa de variación

12.46 ¿Cuáles de las siguientes gráficas representan una función?



Solo la gráfica del apartado a

12.47 Observa la gráfica y estudia las siguientes propiedades.

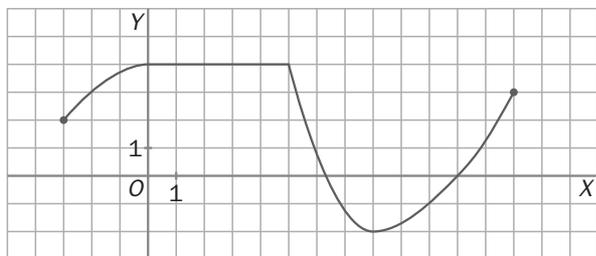


- Dominio y recorrido.
- Calcula $f(-3)$, $f(4)$ y $f(8)$.
- Intervalos de continuidad y discontinuidades.
- Tasa de variación en los intervalos $[-4, -2]$, $[0, 3]$ y $[6, 8]$.

- Dominio: $(-7, 10]$; recorrido: $[-3, 6]$
- $f(-3) = 1,5$; $f(4) = 4$; y $f(8) = 1$
- Intervalos de continuidad: $(-7, 3) \cup (3, 8) \cup (8, 10)$. Las discontinuidades están en $x = 3$ y $x = 8$.
- $TV[-4, -2] = 0 - 2 = -2$; $TV[0, 3] = 2 - (-3) = 5$; $TV[6, 8] = 1 - 6 = -5$

Crecimiento, simetrías y periodicidad

12.48 Indica los intervalos donde la función es creciente, constante y decreciente.

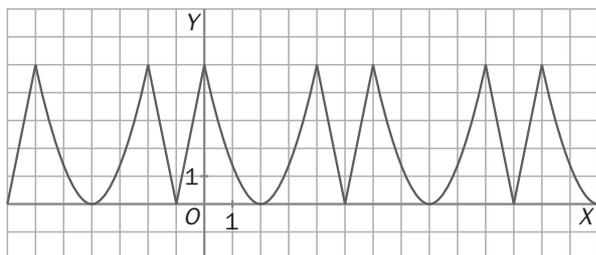


Creciente: $[-3, 0) \cup (8, 13)$

Constante: $(0, 5)$

Decreciente: $(5, 8)$

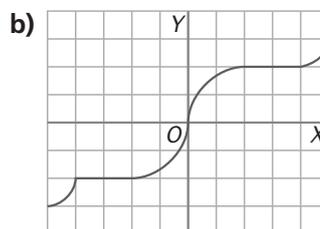
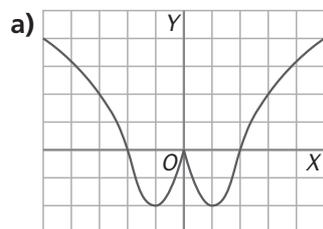
12.49 La gráfica de una función tiene el siguiente aspecto.



¿Es periódica? En caso afirmativo, indica su período.

Sí, con período 6

12.50 Indica la simetría de estas funciones.



a) Simétrica respecto al eje OY

b) Simétrica respecto al origen

12.51 Dibuja la gráfica de una función que se ajusta a las siguientes características.

Dominio: $(-3, 3)$

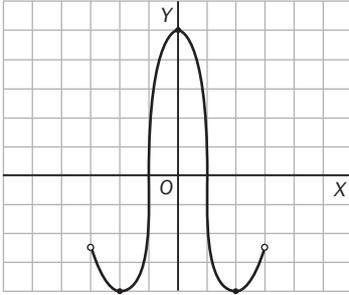
Recorrido: $[-4, 5]$

Mínimos en $(-2, -4)$ y $(2, -4)$

Máximo en $(0, 5)$

Simetría: par

Respuesta abierta.



12.52 La fórmula $y = -x^2 + 5x$ expresa el área de una familia de rectángulos de un determinado perímetro en función de la base. ¿Cuál es el perímetro de la familia de rectángulos?

Área = base · altura

$$y = -x^2 + 5x = x(5 - x) \rightarrow \text{Altura} = (5 - x)$$

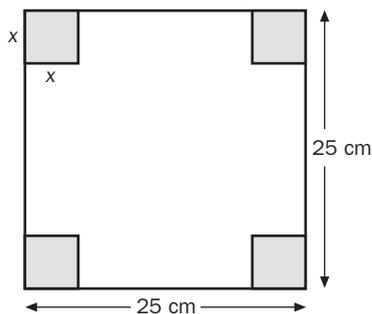
Perímetro = 2 · base + 2 · altura

$$\text{Perímetro} = 2x + 2(5 - x) = 2x + 10 - 2x = 10$$

12.53 Dentro del grupo de cilindros de 2 centímetros cúbicos de volumen, halla la fórmula del área del cilindro en función del radio de la base.

$$\text{Área} = 2\pi x^2 + 2\pi xh = 2\pi x^2 + 2\pi x \cdot \frac{2}{\pi x^2} = 2\pi x^2 + \frac{4}{x}$$

12.54 Con un cartón cuadrado de 25 centímetros de lado, se construyen cajas sin tapa recortando de cada esquina cuadrados pequeños de lado x . Calcula la expresión algebraica del volumen de la caja en función del lado x .



Observando la figura se tiene:

$$a = 25 - 2x$$

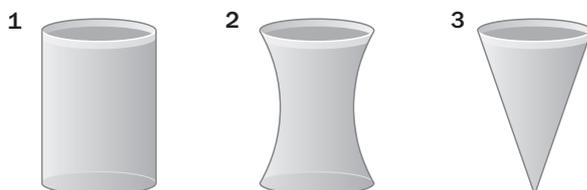
$$b = 25 - 2x$$

$$c = x$$

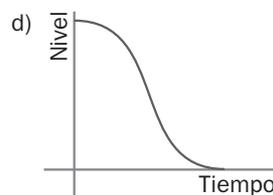
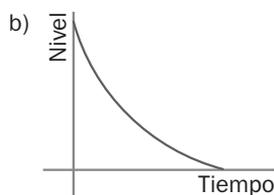
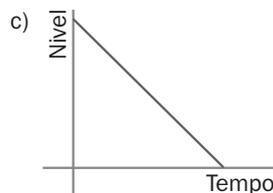
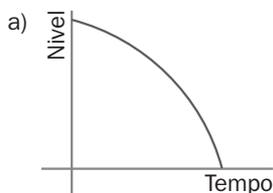
$$v = (25 - 2x)^2 \cdot x \text{ cm}^3$$

12.55 Vaciado de depósitos

Los siguientes depósitos están llenos con la misma cantidad de agua y contienen en su base un dispositivo mecánico y un grifo que hacen que se arrojen, en los tres casos, 5 litros por minuto de forma constante.



Las gráficas representan la altura del nivel del agua en función del tiempo que ha pasado desde que se ha abierto el grifo.

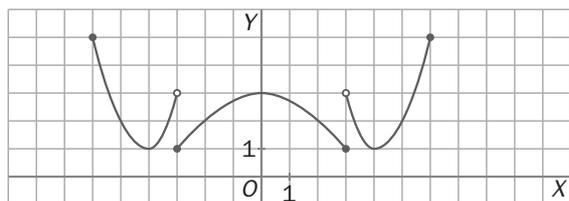


Indica cuál es la gráfica intrusa y señala a qué depósito corresponde cada una de las otras tres.

- La gráfica a corresponde al recipiente 3.
- La gráfica c corresponde al recipiente 1.
- La gráfica d corresponde al recipiente 2.
- La gráfica b es la intrusa.

AUTOEVALUACIÓN

12.A1 Halla el dominio, recorrido, máximos y mínimos, discontinuidades, crecimiento y decrecimiento, y simetrías de la siguiente función.



- Dominio: $[-6, 6]$
- Recorrido: $[1, 5]$
- Mínimos: $(-4, 1)$, $(-3, 1)$, $(3, 1)$ y $(4, 1)$
- Máximo: $(-6, 5)$, $(6, 5)$ y $(0, 3)$
- Discontinuidades: $\{-3, 3\}$
- Creciente: $(-4, -3) \cup (-3, 0) \cup (4, 6)$
- Decreciente: $(-6, -4) \cup (0, 3) \cup (3, 4)$
- Simetría: par

12.A2 En un triángulo equilátero de lado x , expresa mediante una fórmula la altura en función del lado.

Sea h la altura y x el lado de la base.

Aplicando el teorema de Pitágoras se tiene:

$$\text{Altura: } h = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

12.A3 Un agente de seguros de una empresa aseguradora A gana un mínimo de 400 euros al mes y , además, 12 euros por cada seguro que vende. El agente de otra aseguradora B gana 20 euros por cada seguro vendido, pero no tiene sueldo fijo.

a) Expresa la ecuación de la función que relaciona el número de seguros vendidos con el sueldo, en cada aseguradora.

b) Dibuja sus gráficas.

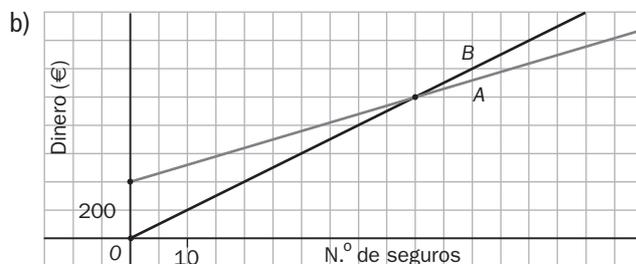
c) ¿A partir de cuántos seguros vendidos gana más el de la aseguradora B ?

a) Llamaremos x al número de seguros vendidos.

La función $f(x)$ representa el sueldo de un empleado de la aseguradora A , y $g(x)$, el sueldo de un empleado de la aseguradora B .

$$f(x) = 400 + 12x$$

$$g(x) = 20x$$



c) $20x \geq 400 + 12x \rightarrow x \geq 50$

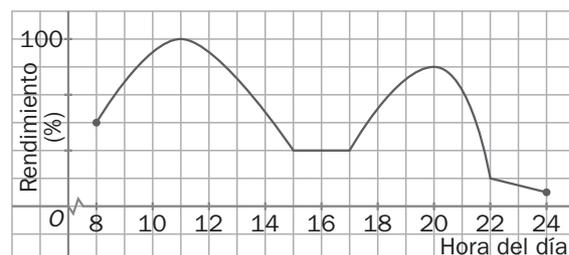
A partir de 50 seguros

12.A4 Indica el tipo de simetría que existe en la siguiente función expresada por una tabla.

x	-3	1	4	0	-1	3	-4
y	7	2	-6	0	-2	-7	6

Simetría impar

12.A5 Esta gráfica estudia el rendimiento de los escolares en función de la hora del día.



a) ¿Cuándo se produce el máximo rendimiento? ¿Y el menor rendimiento?

b) ¿En qué período de la mañana se tiene mayor concentración?

c) ¿En qué momento de la tarde consideras que se deben hacer los deberes?

a) El máximo se produce a las 11.00, y el mínimo, a las 24.00.

b) De 9.30 a 11.00

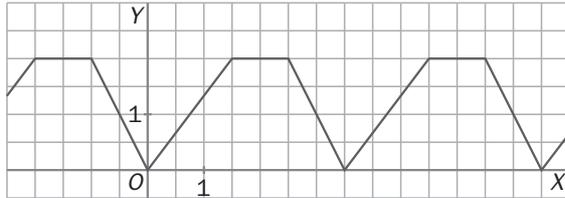
c) A las 8.00

12.A6 Si una función continua, sin ser constante en ningún intervalo, tiene un solo máximo en $(-2, 5)$ y un solo mínimo en $(1, -3)$, ¿en qué intervalos crece y en cuáles decrece?

Crece en $(-\infty, -2)$ y en $(1, +\infty)$.

Decrece en $(-2, 1)$.

12.A7 Observa la gráfica de esta función.



¿Es periódica? En caso afirmativo, indica el período.

Sí, es periódica, y su período es 3,5.