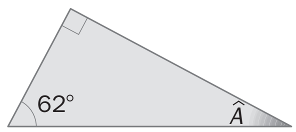
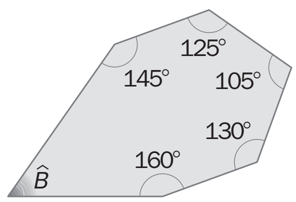
EJERCICIOS PROPUESTOS

8.1 Calcula la medida del ángulo que falta en cada figura.

a)



b)



a) En un triángulo, la suma de las medidas de sus ángulos es 180°.

$\widehat{A} = 180° - 90° - 62° = 28$

El ángulo mide 28°.

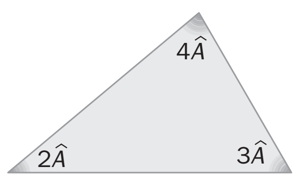
b) En un hexágono, la suma de las medidas de sus ángulos es $180 \cdot (6 - 2) = 720°$.

$\widehat{B} = 720° - 145° - 125° - 105° - 130° - 160° = 55$

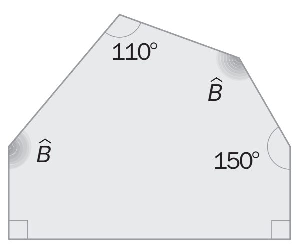
El ángulo mide 55°.

8.2 Determina cuánto mide el ángulo desconocido en estas figuras.

a)



b)

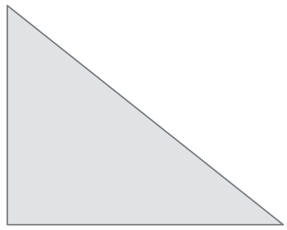


a) $180° = 2\widehat{A} + 4\widehat{A} + 3\widehat{A} = 9\widehat{A} \Rightarrow \widehat{A} \Rightarrow 20°$

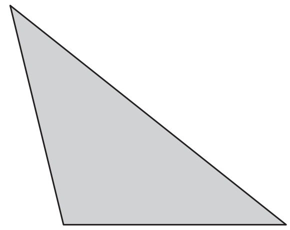
b) $720° = 90° + \widehat{B} + 110° + \widehat{B} + 150° + 90° = 440° + 2\widehat{B} \Rightarrow \widehat{B} = 140°$

8.3 Copia cada triángulo y halla gráficamente el circuncentro, el incentro, el baricentro y el ortocentro.

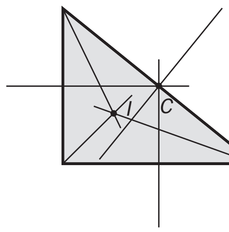
a)

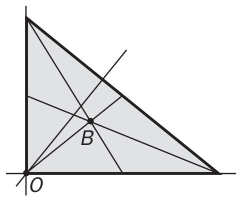


b)

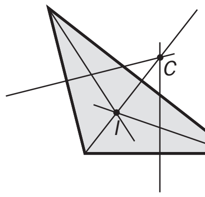


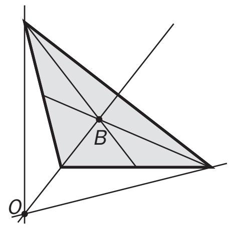
a)



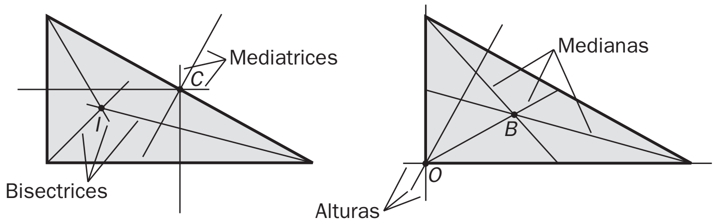


b)

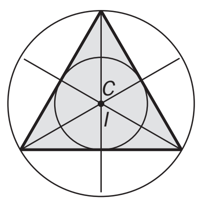




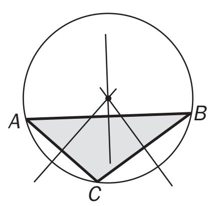
8.4 Dibuja en un triángulo rectángulo las mediatrices, medianas, bisectrices y alturas.



8.5 Dibuja en un triángulo equilátero la circunferencia inscrita y la circunscrita.



8.6 Dibuja tres puntos *A*, *B* y *C*, no alineados, y traza una circunferencia que pase por ellos.



8.7 En un triángulo, el baricentro divide a una mediana en dos segmentos. Si el mayor mide 6 centímetros, ¿cuánto mide el otro segmento?

El baricentro cumple que corta la mediana en un punto tal que su distancia al vértice es doble que su distancia al punto medio del lado opuesto. Si el mayor de esos dos segmentos es de 6 cm, el otro medirá 3 cm.

8.8 Razona si las siguientes parejas de triángulos pueden ser semejantes.

a) 40°, 50°, $\widehat{A}$; 40°, $\widehat{B}$, 90°

b) 60°, 60°, 60°; 8 cm, 8 cm, 8 cm

a) Para que sea triángulo, la suma de sus ángulos tiene que ser 180°, así tenemos que $\widehat{A}$ debe valer 90°, y $\widehat{B}$, 50°, de modo que todos los ángulos son iguales y $\widehat{B}$, por tanto, son semejantes.

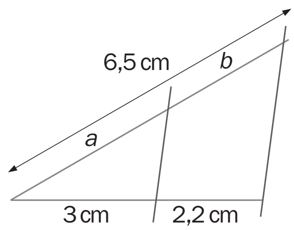
b) Son semejantes. El triángulo con los tres lados iguales es equilátero, así que tendrá los tres ángulos iguales, eso quiere decir que cada ángulo mide 60°, de modo que los ángulos son iguales a los del primer triángulo. Y por el otro lado, el primer triángulo tiene que tener los tres lados iguales por tener los tres ángulos iguales, así que todos los lados seguirán la misma proporción comparando con el segundo triángulo del enunciado.

8.9 Los lados de un rectángulo miden 8 y 4 centímetros, respectivamente. Un rectángulo semejante tiene como perímetro 240 centímetros. ¿Cuáles son sus dimensiones?

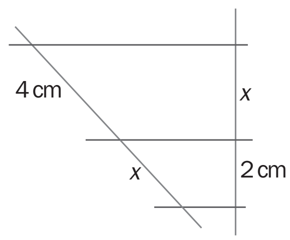
El perímetro del primer rectángulo es de $2 \cdot 8 + 2 \cdot 4 = 24$ cm. Si multiplicamos todos los lados por 10, tenemos un rectángulo de lados 80 y 40, que tiene de perímetro 240 cm. Así que los lados del rectángulo buscado miden 80 y 40 cm.

8.10 Calcula el valor de los lados desconocidos.

a)



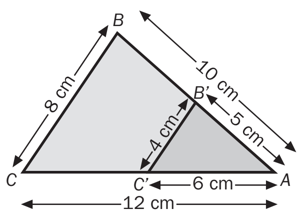
b)



a) $\dfrac{3}{a} = \dfrac{2,2}{6,5 - a} \Rightarrow 3 \cdot (6,5 - a) = 2,2a \Rightarrow 19,5 - 3a = 2,2a \Rightarrow a = 3,75$ cm y $b = 6,5 - 3,75 = 2,75$ cm

b) $\dfrac{4}{x} = \dfrac{x}{2} \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = \sqrt{8}$ cm

8.11 Los lados de un triángulo miden 8, 10 y 12 centímetros. Construye sobre él otro triángulo, en posición de Tales, sabiendo que la razón de semejanza es 0,5.



$$0,5 = \frac{AB'}{AB} \Rightarrow AB' = 0,5 \cdot AB \Rightarrow AB' = 0,5 \cdot 10 = 5 \text{ cm}$$

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B'C'} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{AB}{AB'} = \dfrac{AC}{AC'} \Rightarrow \dfrac{10}{5} = \dfrac{12}{AC'} \Rightarrow AC' = 6 \text{ cm} \\ \dfrac{AB}{AB'} = \dfrac{BC}{B'C'} \Rightarrow \dfrac{10}{5} = \dfrac{8}{B'C'} \Rightarrow B'C' = 4 \text{ cm} \end{cases}$$

8.12 Un alumno dibuja dos rectas *r* y *s*, secantes. A continuación, marca en *r* tres puntos *A*, *B* y *C*, que distan entre sí 3 y 4 centímetros, respectivamente. Por esos puntos traza rectas paralelas que cortan a *s* en *A′*, *B′* y *C′*. Si la distancia entre *A′* y *B′* es 6 centímetros, ¿cuál es la distancia entre *A′C′* y *B′C′*?

$$\frac{3}{6} = \frac{4}{B'C'} = \frac{7}{A'C'} \Rightarrow \begin{cases} B'C' = 8 \text{ cm} \\ A'C' = 14 \text{ cm} \end{cases}$$

8.13 **La sala de una biblioteca tiene base rectangular cuyos lados miden 12 y 15 metros, respectivamente. ¿Cuánto mide la diagonal?**

Aplicando el teorema de Pitágoras: $d^2 = 12^2 + 15^2 = 369 \Rightarrow d = 19{,}2$ m.

8.14 **Averigua cuáles de los siguientes datos corresponden a triángulos rectángulos.**

a) 9, 15 y 17

b) 6, 8 y 10

c) 9, 12 y 15

d) 12, 16 y 19

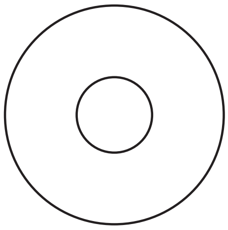
a) $17^2 = 289 \neq 306 = 81 + 225 = 9^2 + 15^2$. No es triángulo rectángulo.

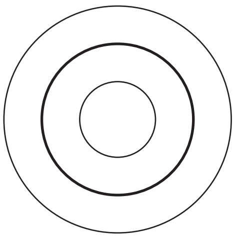
b) $10^2 = 100 = 36 + 64 = 6^2 + 8^2$. Es triángulo rectángulo.

c) $15^2 = 225 = 81 + 144 = 9^2 + 12^2$. Es triángulo rectángulo.

d) $19^2 = 361 \neq 400 = 144 + 256 = 12^2 + 16^2$. No es triángulo rectángulo.

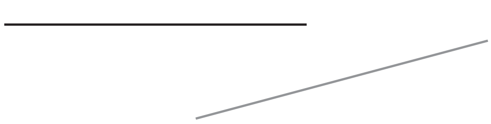
8.15 **Copia las circunferencias de la figura y dibuja el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de ambas. Describe la figura resultante.**

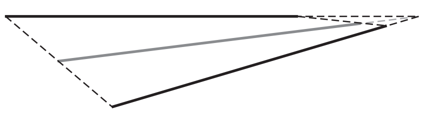




La figura obtenida es una circunferencia concéntrica con las dos dadas, siendo la longitud del radio la media aritmética de las longitudes de los radios de las circunferencias dadas.

8.16 **Copia los segmentos de la figura y dibuja el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de ambos. Describe la figura resultante.**





La figura obtenida es parte de la bisectriz del ángulo formado por la prolongación de los segmentos dados.

8.17 **Halla el área de un triángulo isósceles cuyos lados miden 8, 6 y 6 centímetros.**

Averiguamos primero la altura, h, sobre el lado desigual. Dividiendo el triángulo por dicha altura obtenemos un triángulo rectángulo que cumple que $6^2 = h^2 + 4^2$. Despejamos h y obtenemos la altura, $h = 4{,}5$ cm.

Calculamos el área del triángulo: $A = \dfrac{8 \cdot 4{,}5}{2} = 18$ cm^2.

8.18 Calcula el área y el perímetro de un rombo cuyas diagonales miden 18 y 12 centímetros.

$A = \dfrac{18 \cdot 12}{2} = 108 \text{ cm}^2$

Se calcula el lado como la hipotenusa del triángulo rectángulo que tiene por catetos las mitades de las dos diagonales del rombo:

$L = \sqrt{9^2 + 6^2} = 10{,}82 \text{ cm}$

$P = 4 \cdot 10{,}82 = 43{,}28 \text{ cm}$

8.19 La diagonal menor de un rombo mide 6 centímetros y el lado 5 centímetros. Determina su área.

Las diagonales se cortan en el punto medio. Dibujamos un triángulo rectángulo cuyos catetos son la mitad de cada una de las diagonales, y la hipotenusa, un lado.

$5^2 = 3^2 + c^2 \Rightarrow c = 4 \text{ cm} \Rightarrow D = 8 \text{ cm}$

$A = \dfrac{8 \cdot 6}{2} = 24 \text{ cm}^2$

8.20 ¿Cuánto mide el área de un hexágono regular de 20 centímetros de lado?¿Y su perímetro?

Formamos un triángulo rectángulo de catetos la apotema y la mitad de un lado, y de hipotenusa el segmento que va desde el centro del hexágono hasta uno de los vértices, que coincide con el radio de la circunferencia circunscrita, el cual, por tratarse de un hexágono regular, mide lo mismo que el lado del hexágono.

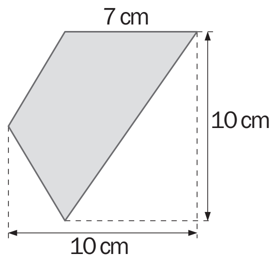
$20^2 = 10^2 + ap^2 \Rightarrow ap = 17{,}3 \text{ cm}$

$A = \dfrac{(6 \cdot 20) \cdot 17{,}3}{2} = 1\,038 \text{ cm}^2$

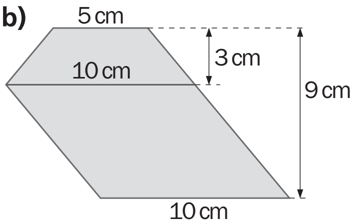
$P = 6 \cdot 20 = 120 \text{ cm}$

8.21 Averigua el área de estas figuras.

a)



b)



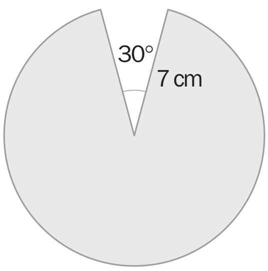
a) Sumamos el área de los dos triángulos: $A = \dfrac{10 \cdot 7}{2} + \dfrac{10 \cdot 3}{2} = 35 + 15 = 50 \text{ cm}^2$

b) Para calcular el área sumamos el área del trapecio y la del romboide.

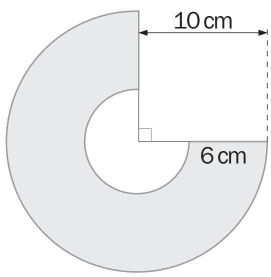
$A = \dfrac{(10 + 5) \cdot 3}{2} + 10 \cdot (9 - 3) = \dfrac{165}{2} = 82{,}5 \text{ cm}^2$

8.22 Halla el área de las siguientes figuras.

a)



b)

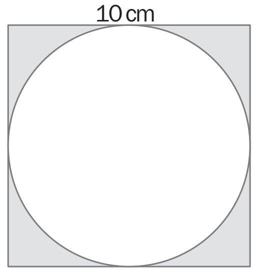


a) Sector circular: $A = \dfrac{\pi \cdot 7^2 \cdot 330°}{360°} = 141{,}11 \text{ cm}^2$

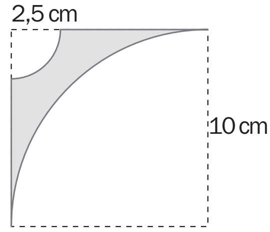
b) Trapecio circular: $A = \dfrac{\pi \cdot 270° \cdot (10^2 - 6^2)}{360°} = 48\pi = 150{,}80 \text{ cm}^2$

8.23 **Calcula el área de las figuras sombreadas.**

a)



b)

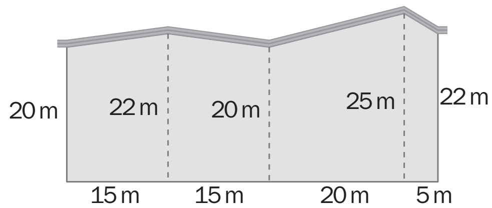


a) $A_{\text{Cuadrado}} - A_{\text{Círculo}} = 10^2 - \pi \cdot 5^2 = 21{,}46 \text{ cm}^2$

b) $A_{\text{Cuadrado}} - A_{\text{SecCirc1}} - A_{\text{SecCirc2}} = 10^2 - \dfrac{\pi \cdot 10^2 \cdot 90}{360} - \dfrac{\pi \cdot 2{,}5^2 \cdot 90}{360} = 100 - 78{,}54 - 4{,}91 = 16{,}55 \text{ cm}^2$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

8.24 **Calcula el área de la finca de la figura.**

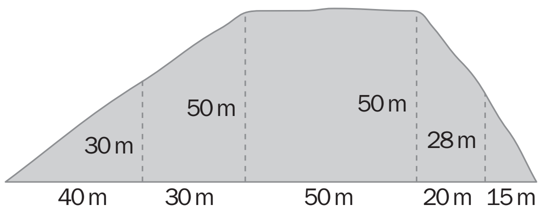


Sumamos las áreas de los cuatro trapecios en que podemos dividir la finca.

$$A = A_{T_1} + A_{T_2} + A_{T_3} + A_{T_4} = \frac{(20 + 22) \cdot 15}{2} + \frac{(22 + 20) \cdot 15}{2} + \frac{(20 + 25) \cdot 20}{2} + \frac{(25 + 22) \cdot 5}{2} = 1\,197{,}5$$

La finca tiene un área de 1 197,5 m^2.

8.25 **Determina el área del islote de la figura.**



Sumamos las áreas de los dos triángulos y los dos trapecios en que podemos dividir el plano del islote.

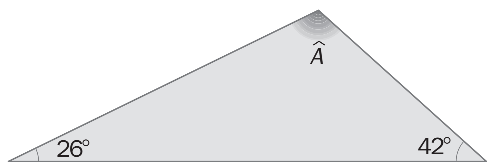
$$A = A_{T_1} + A_{T_2} + A_{T_3} + A_{T_4} + A_{T_5} = \frac{30 \cdot 40}{2} + \frac{(30 + 50) \cdot 30}{2} + \frac{(50 + 50) \cdot 50}{2} + \frac{(50 + 28) \cdot 20}{2} + \frac{28 \cdot 15}{2} = 5\,290$$

El islote tiene 5 290 m^2.

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

Ángulos y triángulos

8.26 **Halla la medida del ángulo $\widehat{A}$ en el siguiente triángulo.**



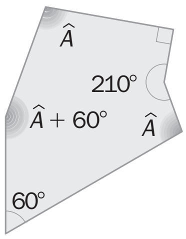
$$180° = 26° + \widehat{A} + 42° \Rightarrow \widehat{A} = 180° - 26° - 42° = 112°$$

8.27 **Calcula la suma de los ángulos interiores de un pentágono.**

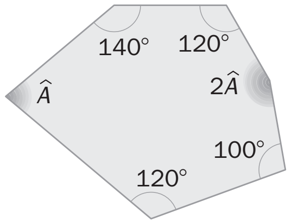
El pentágono tiene 5 lados; así, la suma de sus ángulos interiores es de $180° \cdot (5 - 2) = 540°$.

8.28 **¿Cuánto miden los ángulos designados por letras en estas figuras?**

a)



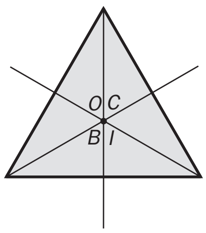
b)



a) $180°(6 - 2) = \widehat{A} + 90° + 210° + \widehat{A} + 60° + (\widehat{A} + 60°) \Rightarrow 3\widehat{A} = 300° \Rightarrow \widehat{A} = 100°$

b) $180°(6 - 2) = \widehat{A} + 140° + 120° + 2\widehat{A} + 100° + 120° \Rightarrow 3\widehat{A} = 240° \Rightarrow \widehat{A} = 80°$

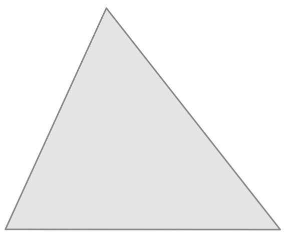
8.29 **Dibuja un triángulo equilátero y traza sus mediatrices, medianas, bisectrices y alturas. Explica qué observas.**



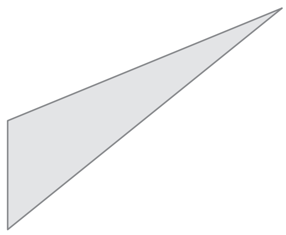
Que todas se cortan en el mismo punto.

8.30 **Traza la circunferencia inscrita y la circunscrita de los siguientes triángulos.**

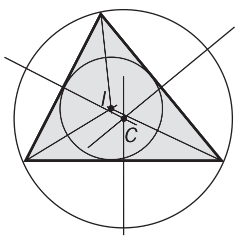
a)



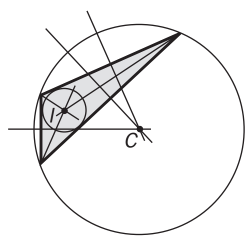
b)



a)



b)



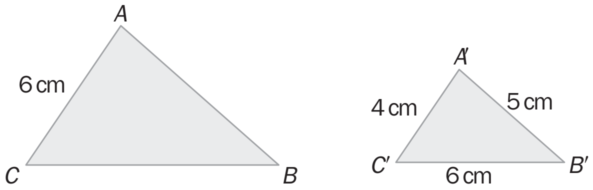
Figuras semejantes. Teorema de Tales

8.31 **Los lados de un triángulo miden, respectivamente, 10, 12 y 14 centímetros. Los de otro triángulo miden 15, 18 y 21 centímetros. ¿Son semejantes?**

$$\frac{15}{10} = \frac{18}{12} = \frac{21}{14} = 1{,}5$$

Son semejantes, puesto que los lados son proporcionales.

8.32 Los triángulos de la figura son semejantes. Calcula el valor de *AB* y *BC*.

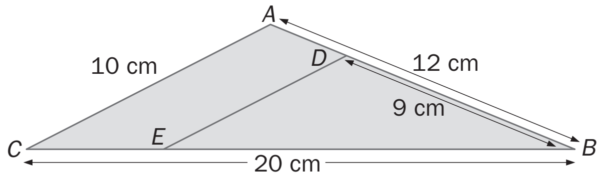


$$\frac{6}{4} = \frac{AB}{5} = \frac{BC}{6} \Rightarrow AB = 7{,}5 \text{ cm y } BC = 9 \text{ cm}$$

8.33 Los lados de un triángulo miden 5, 6 y 9 centímetros. El lado menor de otro triángulo semejante al dado mide 20 centímetros. Halla la medida de los otros lados.

$$\frac{20}{5} = \frac{a}{6} = \frac{b}{9} \Rightarrow a = 24 \text{ cm y } b = 36 \text{ cm}$$

8.34 Calcula la medida de *DE* y *CE*.



$$\frac{12}{9} = \frac{10}{DE} \Rightarrow DE = 7{,}5 \text{ cm}$$

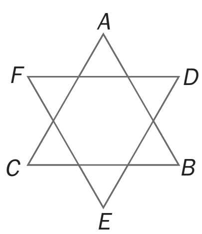
$$\frac{12}{3} = \frac{20}{CE} \Rightarrow CE = 5 \text{ cm}$$

8.35 Los lados de un triángulo miden 9, 12 y 16 centímetros. Calcula las longitudes de los lados de otro triángulo semejante al dado, tal que su perímetro es 148 centímetros.

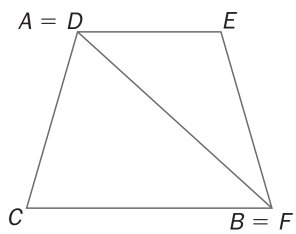
$$\frac{148}{9 + 12 + 16} = \frac{a}{9} = \frac{b}{12} = \frac{c}{16} \Rightarrow a = 36 \text{ cm}, b = 48 \text{ cm}, c = 64 \text{ cm}$$

8.36 Razona, utilizando algún criterio de semejanza de triángulos, si los triángulos *ABC* y *DEF* son semejantes.

a)



b)



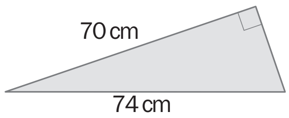
a) Son semejantes porque ambos son equiláteros.

b) El lado común de los dos triángulos es, obviamente, de la misma longitud en ambos, y también son de igual longitud los lados que se corresponden con los lados iguales del trapecio isósceles. La razón de proporcionalidad de los lados sería 1, pero los terceros lados, que son cada una de las bases del trapecio, no conservan esa razón de proporcionalidad. Por tanto, los triángulos no son semejantes.

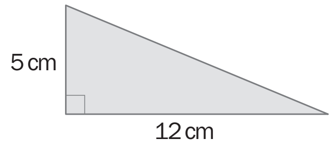
Teorema de Pitágoras

8.37 Averigua el valor del lado desconocido de estos triángulos.

a)



b)



a) $l^2 = 74^2 - 70^2 = 576 \Rightarrow l = 24$ cm

b) $l^2 = 5^2 + 12^2 = 169 \Rightarrow l = 13$ cm

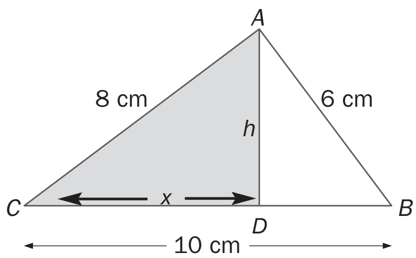
8.38 Determina la altura de un triángulo equilátero cuyo lado mide 12 centímetros.

Si llamamos h a la altura del triángulo, tendremos

$12^2 = h^2 + 6^2$

$h^2 = 12^2 - 6^2 = 108 \Rightarrow h = 10{,}39$ cm

8.39 Calcula el área del triángulo rectángulo sombreado.



Los triángulos ABC y DAC son semejantes, luego

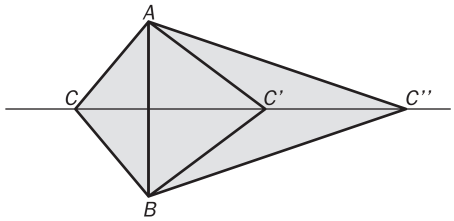
$$\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{CD} \Rightarrow \frac{10}{8} = \frac{8}{x} \Rightarrow x = 6{,}4 \text{ cm} \Rightarrow h^2 = 8^2 - 6{,}4^2 = 23{,}04 \text{ cm} \Rightarrow h = 4{,}8 \text{ cm}$$

Por tanto, el área será

$$A = \frac{6{,}4 \cdot 4{,}8}{2} = 15{,}36 \text{ cm}^2$$

Lugar geométrico

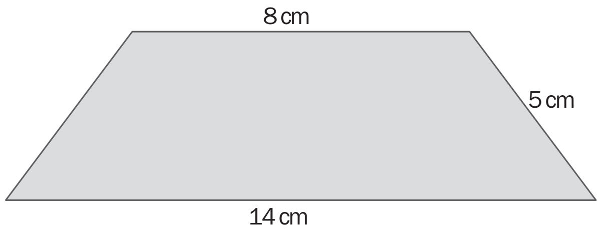
8.40 Construye varios triángulos isósceles cuyo lado desigual sea un segmento *AB* dado y nombra con la letra *C* el tercer vértice de dichos triángulos. ¿Cuál es el lugar geométrico que forman los puntos C?



El lugar geométrico que forman los puntos C es la recta mediatriz del segmento AB.

Longitudes y áreas

8.41 Halla el área del trapecio isósceles de la figura.

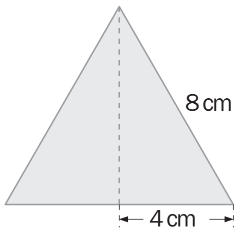


Usando el teorema de Pitágoras calculamos la altura: $h^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow h = 4$ cm

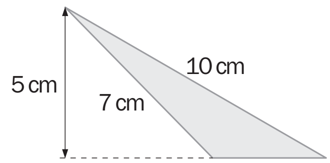
$$A = \left(\frac{B + b}{2}\right) \cdot h = \left(\frac{14 + 8}{2}\right) \cdot 4 = 44 \text{ cm}^2$$

8.42 Calcula el área de estos triángulos.

a)



b)



a) Aplicamos el teorema de Pitágoras para saber la altura: $h^2 = 8^2 - 4^2 \Rightarrow h = 6{,}93$ cm

$$A = \frac{8 \cdot 6{,}93}{2} = 27{,}72 \text{ cm}^2$$

b) Por Pitágoras calculamos la medida de la base del triángulo rectángulo de hipotenusa 10 y altura 5 y también la base del triángulo rectángulo de la misma altura y de hipotenusa 7. Restándolas tenemos la medida de la base del triángulo dado.

$b_1^2 = 10^2 - 5^2 \Rightarrow b_1 = 8{,}66$ cm

$b_2^2 = 7^2 - 5^2 \Rightarrow b_2 = 4{,}90$ cm

$b = 8{,}66 - 4{,}90 = 3{,}76 \text{ cm} \Rightarrow A = \dfrac{3{,}76 \cdot 5}{2} = 9{,}4 \text{ cm}^2$

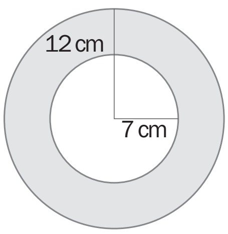
8.43 ¿Cuánto mide el área de un círculo de 20 centímetros de diámetro?

El radio es entonces de 10 centímetros de longitud, luego

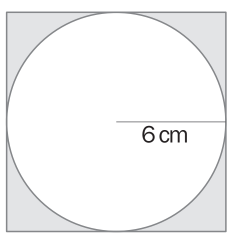
$$A = \pi \cdot 10^2 = 314{,}16 \text{ cm}^2$$

8.44 Determina el área de las regiones sombreadas.

a)



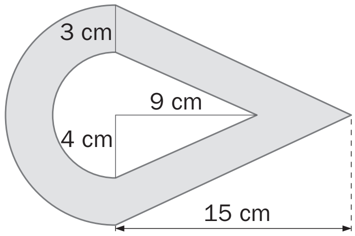
b)



a) $A = \pi(12^2 - 7^2) = 95\pi = 298{,}45 \text{ cm}^2$

b) $A = A_{\text{Cuadrado}} - A_{\text{Círculo}} = 12^2 - \pi \cdot 6^2 = 144 - 113{,}10 = 30{,}9 \text{ cm}^2$

8.45 **Halla el área de la región sombreada de la figura.**

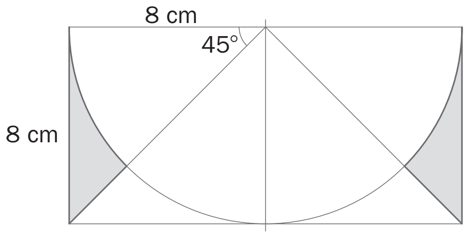


Por un lado, la media corona circular: $\frac{\pi(7^2 - 4^2)}{2} = 51{,}84 \text{ cm}^2$

Por otro lado, la zona entre los dos triángulos: $\frac{14 \cdot 15}{2} - \frac{8 \cdot 9}{2} = 105 - 36 = 69 \text{ cm}^2$

$$A = 51{,}84 + 69 = 120{,}84 \text{ cm}^2$$

8.46 **Calcula el área de la región sombreada.**



La figura es simétrica, basta con que se calcule el área de una parte y se multiplique por dos para tener el área de la región sombreada.

La parte sombreada es la mitad del área que queda después de restarle al área del cuadrado el área del sector circular de 90°, o lo que es lo mismo, una cuarta parte de la circunferencia.

$$A = 2 \cdot \left(\frac{8^2 - \frac{1}{4}\pi 8^2}{2} \right) = 13{,}74 \text{ cm}^2$$

8.47 **El perímetro de un rombo es 40 centímetros y su diagonal mayor mide 16 centímetros. Averigua su área.**

El rombo tiene todos sus lados iguales, cada uno de ellos medirá 10 cm. Usando el teorema de Pitágoras averiguamos la medida de la diagonal menor; para ello, el triángulo rectángulo que usamos es el formado por un lado del rombo y la mitad de cada una de las diagonales.

$c^2 = 10^2 - 8^2 \Rightarrow c = 6 \text{ cm} \Rightarrow d = 12 \text{ cm}$

$A = \frac{16 \cdot 12}{2} = 96 \text{ cm}^2$

8.48 **Calcula la longitud del arco de circunferencia y el área del sector circular cuyo radio es 6 decímetros y cuyo ángulo mide 160°.**

$L = \frac{2 \cdot \pi \cdot 6 \cdot 160°}{360°} = 16{,}76 \text{ dm}$

$A = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 160°}{260°} = 50{,}27 \text{ dm}^2$

8.49 **Halla el área de un hexágono regular de 12 centímetros de lado.**

Por ser un hexágono regular, los triángulos que se forman al unir dos vértices consecutivos con el centro son equiláteros, y podemos calcular su altura, que coincide con la apotema.

$h^2 = 12^2 - 6^2 = 108 \Rightarrow h \equiv a = 10{,}39 \text{ cm}$

$A = \frac{(12 \cdot 6) \cdot 10{,}39}{2} = 374{,}04 \text{ cm}^2$

8.50 Dos triángulos rectángulos tienen un ángulo que mide 35°. ¿Son semejantes?

Los tres ángulos coinciden, porque si coinciden dos de ellos, el tercero tiene que coincidir, y aplicando el teorema de Tales a los dos triángulos que se escojan, podemos concluir que son semejantes.

8.51 En un triángulo, trazamos desde el vértice *A* la mediana al lado *BC* y medimos su longitud, 18 centímetros. Calcula la distancia del baricentro al vértice *A* y al punto medio del lado *BC*.

Sabemos que el baricentro es el punto que cumple que la distancia al vértice es el doble que la distancia al punto medio del lado opuesto.

La distancia al vértice será $\frac{2}{3}$ de la longitud de la mediana.

De modo que del baricentro al vértice *A* la distancia será de 12 cm, y al punto medio de *BC*, de 6 cm.

8.52 ¿Cuál es la máxima distancia que puede recorrer en línea recta un jugador de fútbol en un campo cuyas medidas son 100 × 70 metros?

La diagonal del campo, que será la hipotenusa del triángulo rectángulo de catetos 100 y 70.

$$d^2 = 100^2 + 70^2 \Rightarrow d = 122{,}07 \text{ m}$$

8.53 En una circunferencia inscribimos un triángulo equilátero y unimos cada uno de sus vértices con el centro de la circunferencia. ¿Cómo es cada uno de los triángulos que se forman?

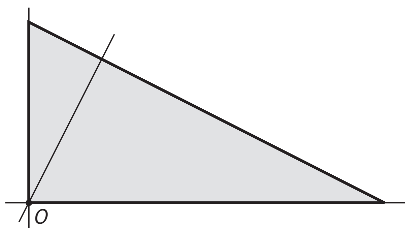
El centro de la circunferencia es el circuncentro del triángulo que está situado a igual distancia de cada uno de los vértices. Así que se forman tres triángulos isósceles. Como partíamos un triángulo equilátero, tendremos tres triángulos isósceles iguales.

8.54 Los catetos de un triángulo rectángulo miden 6 y 9 centímetros, respectivamente. Los catetos de otro triángulo rectángulo miden 10 y 15 centímetros. ¿Son semejantes ambos triángulos?

$\frac{6}{10} = \frac{9}{15}$. Aplicando el teorema de Tales, podemos decir que los triángulos son semejantes, puesto que si estos dos lados son proporcionales, el tercero también lo será.

8.55 ¿Dónde se encuentra situado el ortocentro de cualquier triángulo rectángulo? Ayúdate de un dibujo para encontrar la respuesta.

En el vértice cuyo ángulo es de 90°.



8.56 Tres pueblos *A*, *B* y *C* quieren construir una piscina común para sus habitantes, de forma que quede a la misma distancia de los tres. ¿En qué punto deben construirla?

En el circuncentro del triángulo cuyos vértices son la situación de cada uno de los pueblos.

8.57 La aguja pequeña del reloj de Julia describe un ángulo de 20° en 35 minutos. Razona si Julia tiene un reloj que atrasa o adelanta.

En 60 minutos, la aguja pequeña tiene que recorrer un ángulo de $\frac{360°}{12} = 30°$; entonces, debe describir un ángulo de 20° cuando sean $\frac{2}{3}$ del tiempo, es decir, transcurridos $\frac{2}{3}60 = 40$ minutos.

Como todavía no han pasado estos, eso quiere decir que la aguja va más rápido de lo que debería. Por tanto, adelanta.

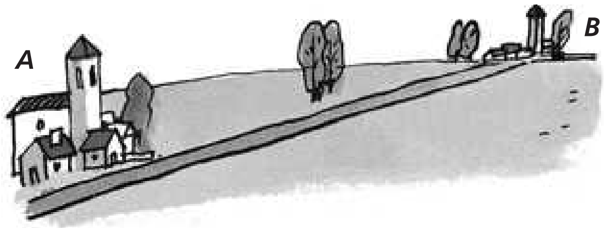
8.58 En un determinado momento del día, un árbol arroja una sombra de 4,23 metros, mientras que, en el mismo momento, la sombra de un palo que mide 1,20 metros es de 0,64 metros. Averigua la altura del árbol.

Aplicamos el teorema de Tales a los triángulos rectángulos formados por el árbol y su sombra y por el palo y la suya.

De modo que $\frac{4,23}{0,64} = \frac{h}{1,2} \Rightarrow h = 7,93$

El árbol tiene una altura de 7,93 metros.

8.59 En la carretera del dibujo se va a poner una gasolinera que se encuentre a la misma distancia de los pueblos *A* y *B*. ¿Dónde tiene que construirse?



En el punto de corte de la carretera con la mediatriz del segmento que tiene como extremos las ciudades.

8.60 Un hexágono tiene dos ángulos rectos y tres ángulos iguales que miden, cada uno, 132°. Halla el sexto ángulo.

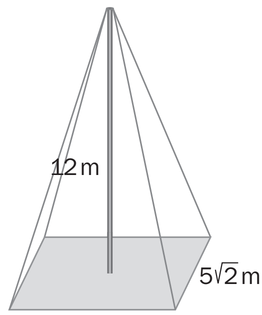
La suma de los ángulos de un hexágono es de $180° \cdot 4 = 720°$. De modo que conocidos cinco ángulos, el último mide $720° - 2 \cdot 90° - 3 \cdot 132° = 144°$.

8.61 Un poste se ha sujetado al suelo mediante cuatro cables, como muestra la figura. Los puntos de amarre de los cables forman un cuadrado de lado $5\sqrt{2}$ metros, en cuyo centro se sitúa el poste.

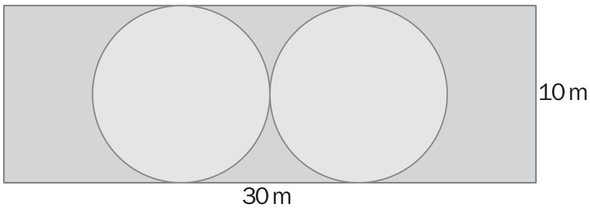
Calcula cuánto cable se ha necesitado en la operación.

Calculamos la diagonal del cuadrado de la base: $d^2 = 2(5\sqrt{2})^2 \Rightarrow d = 10$ m.

La distancia del poste al cable es la mitad de la diagonal, es decir, 5 m. Usamos el teorema de Pitágoras para saber cuánto cable hay desde uno de los vértices hasta el poste: $l^2 = 12^2 + 5^2 \Rightarrow l = 13$ m. Esta longitud de cable es la misma las otras tres veces, de modo que se necesitan $4 \cdot 13 = 52$ m de cable.



8.62 En un terreno rectangular se construyen dos fuentes circulares, como se muestra en la figura, y se planta césped en el terreno restante. ¿Qué superficie ocupa el césped?



El radio de las fuentes es de 5 m, porque vemos que su diámetro coincide con la altura del rectángulo.

$$A_T = 30 \cdot 10 = 300 \text{ m}^2;\ A_F = \pi \cdot 5^2 = 78,54 \text{ m}^2$$

El espacio sobre el que se planta el césped es de $300 - 2 \cdot 78,54 = 142,92$ m^2.

8.63 La rueda de un coche tiene un radio de 33 centímetros. ¿Cuántos kilómetros ha recorrido el coche si la rueda ha dado 80 000 vueltas?

En cada vuelta recorre la longitud de la circunferencia de la rueda.

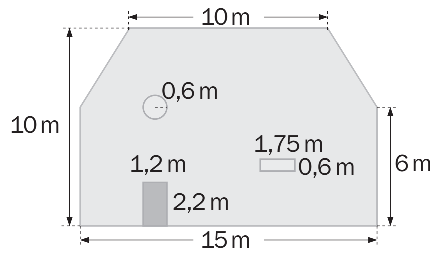
En una vuelta recorre $2 \cdot \pi \cdot 33 = 207{,}35$ cm; en 80 000 recorrerá $80\,000 \cdot 207{,}35 = 16\,588\,000$ cm, que son 165,880 km.

8.64 El parterre de un jardín tiene forma de trapecio circular. Su ángulo mide 135° y los radios de las circunferencias 10 y 6 metros, respectivamente. Calcula la superficie que se puede plantar de césped.

$$A = \frac{\pi \cdot 135° \cdot (10^2 - 6^2)}{360°} = 24\pi = 75{,}40$$

Se puede plantar césped en 75,40 m^2.

8.65 Queremos pintar la fachada de la casa de la figura. Calcula cuánta pintura es necesaria si se gastan 2,5 kilogramos de pintura por metro cuadrado.

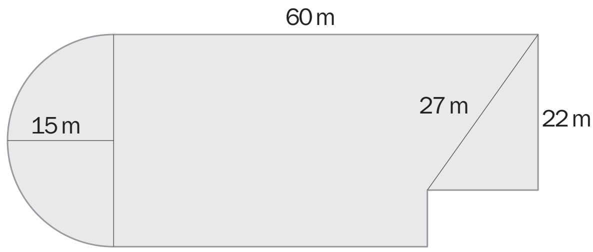


La superficie total de la fachada es de $6 \cdot 15 + \dfrac{(15 + 10) \cdot 4}{2} = 140$ m^2.

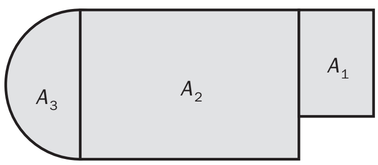
Veamos el área de las superficies que no se van a pintar: $1{,}2 \cdot 2{,}2 + 1{,}75 \cdot 0{,}6 + \pi \cdot 0{,}6^2 = 2{,}64 + 1{,}05 + 1{,}13 = 4{,}82$ m^2.

Hay que pintar $140 - 4{,}82 = 135{,}18$ m^2. La pintura necesaria es: $2{,}5 \cdot 135{,}18 = 337{,}95$ kg.

8.66 La finca de la figura se vende a 200 euros el metro cuadrado. Calcula cuál es su precio total.



Dividimos el terreno en figuras geométricas de las que conocemos cómo calcular el área.



$x = \sqrt{27^2 - 22^2} = 15{,}65$ m

$A_1 = 15{,}65 \cdot 22 = 344{,}5$ m^2

Si el radio de la circunferencia es de 15 m, el diámetro que coincide con la altura de la figura es de 30.

$A_2 = (60 - 15{,}65) \cdot 30 = 1\,330{,}5$ m^2 ; $A_3 = \dfrac{\pi \cdot 15^2}{2} = 353{,}43$ m^2

$A = 344{,}5 + 1\,330{,}5 + 353{,}43 = 2\,028{,}43$ m^2

$200 \cdot 2\,028{,}43 = 405\,686$

La finca tiene un precio de 405 686 €.

8.67 Juan y Miguel quieren medir la anchura del río de su pueblo y proceden de la siguiente manera: Juan se coloca en el borde del río y Miguel a 3 metros de él, alineados ambos con un árbol que está en la otra orilla. La línea que forman es perpendicular al río. Caminan paralelamente al río, Juan 2,8 metros y Miguel 6 metros, hasta que vuelven a estar alineados con el árbol. ¿Qué anchura tiene el río?

Aplicamos el teorema de Tales, de modo que $\frac{2{,}8}{6} = \frac{a}{3 + a} \Rightarrow 2{,}8\,(3 + a) = 6a \Rightarrow a = 2{,}625$

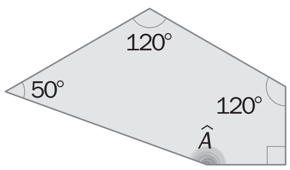
El río tiene un ancho de 2,625 m.

REFUERZO

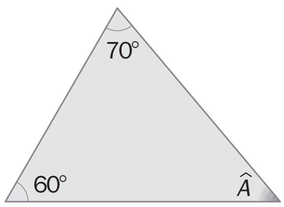
Ángulos y triángulos

8.68 Averigua la medida del ángulo $\widehat{A}$ de la figura.

a)



b)



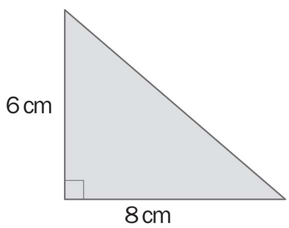
a) $180°(5 - 2) = 50° + 120° + 120° + 90° + \widehat{A} \Rightarrow \widehat{A} = 160°$

b) $180° = 60° + 70° + \widehat{A} \Rightarrow \widehat{A} = 50°$

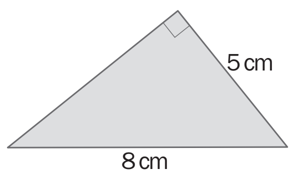
Teorema de Pitágoras

8.69 Calcula el valor desconocido en los siguientes triángulos rectángulos.

a)



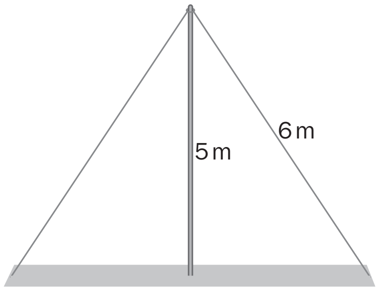
b)



a) $l^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow l = \sqrt{100} = 10$ cm

b) $8^2 = 5^2 + l^2 \Rightarrow l = 6{,}24$ cm

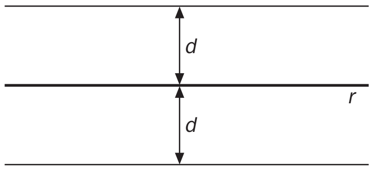
8.70 **Un poste de 5 metros de altura se ha sujetado al suelo mediante dos cables de 6 metros de longitud, como muestra la figura. ¿A qué distancia se han sujetado los cables de la base del poste?**



El poste forma un triángulo rectángulo con el suelo, de modo que aplicamos el teorema de Pitágoras: $6^2 = 5^2 + b^2 \Rightarrow b = 3{,}32$. Los cables se han sujetado a 3,32 m de la base del poste.

Lugar geométrico

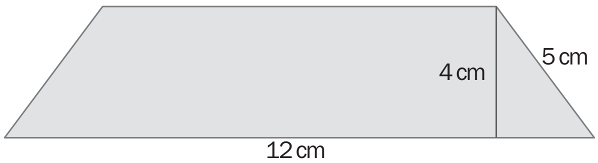
8.71 **Determina el lugar geométrico de los puntos del plano que están a una distancia *d* de una recta *r* dada.**



El lugar geométrico obtenido son dos rectas paralelas a la recta dada.

Longitudes y áreas

8.72 **Halla el perímetro y el área del trapecio isósceles de la figura.**



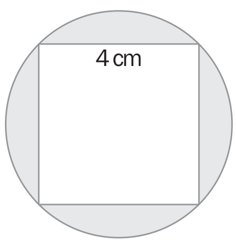
Para saber el valor de la base del triángulo que se forma a los lados del trapecio usamos el teorema de Pitágoras:

$5^2 = 4^2 - x^2 \Rightarrow x = 3$ cm

$P = 12 + 5 + (12 - 3 - 3) + 5 = 28$ cm

$A = \dfrac{(12 + 6) \cdot 4}{2} = 36 \text{ cm}^2$

8.73 **Determina el área de la región sombreada de la figura, donde el lado del cuadrado mide 4 centímetros.**

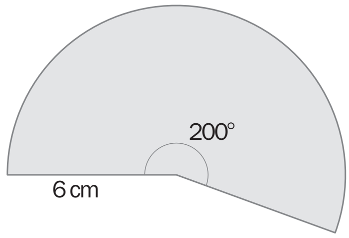


El diámetro del círculo coincide con la diagonal del cuadrado, y la podemos calcular usando el teorema de Pitágoras:

$d^2 = 4^2 + 4^2 \Rightarrow d = 5{,}66 \text{ cm} \Rightarrow r = 2{,}83$ cm

$A = \pi \cdot 2{,}83^2 - 4^2 = 9{,}16 \text{ cm}^2$

8.74 **Halla el perímetro y el área de la figura.**



$$P = 6 + 6 + \frac{2 \cdot \pi \cdot 6 \cdot 200°}{360°} = 32{,}94 \text{ cm}; \; A = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 300°}{360°} = 62{,}83 \text{ cm}^2$$

AMPLIACIÓN

8.75 **Los perímetros de dos triángulos isósceles semejantes miden, respectivamente, 32 y 40 centímetros. Si el lado desigual del menor mide 8 centímetros, ¿cuánto miden los lados del mayor?**

Como los triángulos son semejantes, La longitud de los perímetros es proporcional a la del lado menor:

$$\frac{32}{40} = \frac{8}{x} \Rightarrow x = 10$$

El lado desigual del triángulo mayor mide 10 cm, luego los otros dos lados juntos medirán $40 - 10 = 30$ cm.

Como estos lados deben ser iguales, $30 : 2 = 15$ cm, que es lo que miden los lados iguales del triángulo mayor.

8.76 **Por los vértices *A*, *B* y *C* de un triángulo trazamos una paralela al lado opuesto, formándose el triángulo de vértices *A′*, *B′* y *C′*. Halla:**

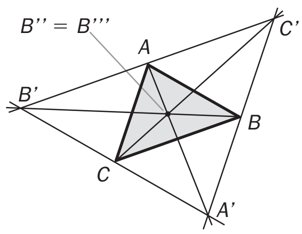
a) La relación entre los ángulos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ y $\widehat{A}'$, $\widehat{B}'$, $\widehat{C}'$.

b) La relación entre los baricentros de ambos triángulos.

c) La relación entre los triángulos *ABC*, *AB′C*, *AC′B* y *A′BC*.

a) Los ángulos son iguales a los que les corresponden: $\widehat{A} = \widehat{A}'$, $\widehat{B} = \widehat{B}'$, $\widehat{C} = \widehat{C}'$.

b) Coinciden en el mismo punto.



c) Son iguales.

8.77 **Dos puntos *A* y *B* están situados en el plano a una distancia de 10 centímetros. Determina todos los puntos que están a 8 centímetros de *A* y a 6 centímetros de *B*.**

Para determinar los puntos que están a 8 cm de *A*, trazamos la circunferencia de centro *A* y que tenga 8 cm de radio.

Para determinar los puntos que están a 6 cm de *B*, trazamos la circunferencia de centro *B* y que tenga 6 cm de radio.

Estas circunferencias se cortarán en dos puntos que están a 8 cm de *A* y a 6 de *B*, luego cumplen las condiciones del problema.

8.78 **Dos torres *A* y *B*, una de 40 metros y la otra de 30 metros de altura, están separadas por un puente de 60 metros de largo. En un punto *C* del puente hay una fuente. Dos pájaros que están en las almenas de cada una de las torres salen a beber de la fuente a la vez y con la misma velocidad, llegando al mismo tiempo a la fuente. ¿A qué distancia está la fuente de ambas torres?**

Si ambos pájaros salen a la vez y llegan a la vez, ambos con la misma velocidad, es que recorren igual distancia. Si llamamos x a la distancia de la fuente a la base de la torre de 30 m, tendremos que

$$d^2 = 30^2 + x^2 \text{ y } d^2 = 40^2 + (60 - x)^2$$

Así, $30^2 + x^2 = 40^2 + (60 - x)^2$

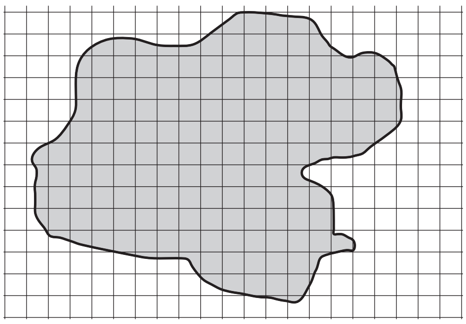
Resolvemos esta igualdad, $x = \dfrac{215}{6} = 35{,}83$.

La fuente está a 35,83 m de la torre de 30 m.

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

8.79 **La superficie de la isla**

Para estimar la superficie de una isla, Juan ha dibujado sobre una cuadrícula el contorno de la misma con la ayuda de una fotografía aérea y un mapa.



a) Observa el dibujo y di si las siguientes afirmaciones son verdaderas o no:

- **El número de cuadrados que están totalmente contenidos en el área encerrada por el contorno corresponde a una estimación inferior de dicha área.**
- **El número de cuadrados que tocan, al menos en parte, el área encerrada por el contorno corresponde a una estimación superior de dicha área**

b) Calcula ambas estimaciones y el error máximo que se cometerá si se toma como nueva estimación la media aritmética de las dos anteriores.

a) Verdadero, ya que no se cuentan todos los cuadrados que contienen superficie de la isla, por lo que es una estimación inferior del área.

Verdadero, ya que se cuentan cuadrados que tocan el área sin estar totalmente contenidos en el área de la isla, por lo que es una estimación superior del área.

b) Estimación inferior: 124 cuadrados

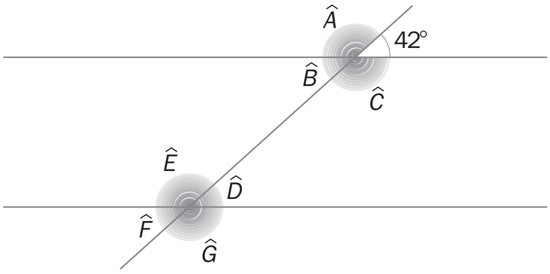
Estimación superior: 174 cuadrados

Nueva estimación: $\dfrac{124 + 174}{2} = 149$ cuadrados

El error máximo cometido es la mitad de la diferencia entre las estimaciones superior e inferior: $\dfrac{174 - 124}{2} = 25$

Por tanto, el error máximo cometido es 25 unidades.

8.A1 Calcula la medida de los ángulos desconocidos de esta figura.



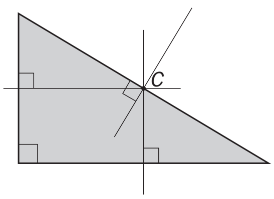
Por el teorema de Tales: $\widehat{B} = \widehat{D} = \widehat{F} = 42°$ y $\widehat{A} = \widehat{C} = \widehat{E} = \widehat{G} = \dfrac{360° - 2\ \ 42°}{2} = 138°$

8.A2 ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos interiores de un octógono regular?

La suma de los ángulos del octógono es $180°\ (8 - 2) = 1\,080°$. Tiene que tener todos los ángulos iguales; así, $1\,080° : 8° = 135°$.

Cada uno de los ángulos de un octógono regular mide 135°.

8.A3 Dibuja un triángulo rectángulo y traza su circuncentro. Explica lo que observas.



El circuncentro de un triángulo rectángulo coincide con el punto medio de la hipotenusa.

8.A4 Los lados de un triángulo miden 6, 7 y 9 centímetros, respectivamente. Otro triángulo semejante tiene de perímetro 66 centímetros. ¿Cuánto miden sus lados?

El perímetro del primer triángulo es de 22 cm.

De modo que $\dfrac{22}{66} = \dfrac{6}{a} = \dfrac{7}{b} = \dfrac{9}{c}$

Entonces, $a = 18$ cm, $b = 21$ cm, $c = 27$ cm

8.A5 La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 10 centímetros y la suma de los catetos es 14 centímetros. Halla la medida de cada cateto.

Usando el teorema de Pitágoras, $10^2 = c^2 + (14 - c)^2$

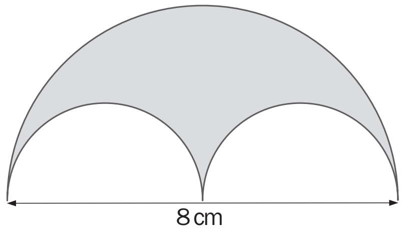
Resolviendo la igualdad tenemos que los catetos miden 8 y 6 cm.

8.A6 Determina la longitud de la circunferencia y el área del círculo de radio 5 centímetros.

$L = 2 \cdot \pi \cdot 5 = 10\pi$ cm

$A = \pi \cdot 5^2 = 25\pi$ cm^2

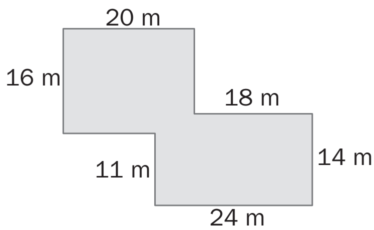
8.A7 **Averigua el área de la región roja de la figura.**



Es el área de medio círculo de 4 cm de radio menos el área de dos medios círculos (un círculo) de 2 cm de radio.

$$A = \frac{\pi 4^2}{2} - \pi 2^2 = 8\pi - 4\pi = 4\pi \text{ cm}^2$$

8.A8 **El terreno de la figura se vende a razón de 250 euros el metro cuadrado. ¿Cuál es su precio total?**



Calculamos primero los metros cuadrados del terreno:

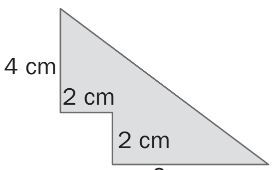
$$A = 20 \cdot 16 + 24 \cdot 14 - 6 \cdot 3 = 638 \text{ m}^2$$

Como cada metro cuadrado vale 250 €, el precio del terreno es:

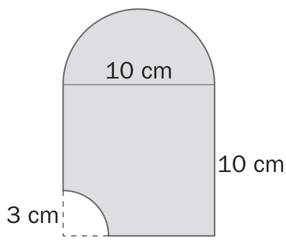
$$638 \cdot 250 = 159\,500 \text{ €}$$

8.A9 **Calcula el área de las siguientes figuras.**

a)



b)



a) $A = \dfrac{(6 + 2) \cdot (4 + 2)}{2} - 2^2 = 20 \text{ cm}^2$

b) $A = 10^2 + \dfrac{\pi \cdot 5^2}{2} - \dfrac{\pi \cdot 3^2}{4} = 132{,}20 \text{ cm}^2$